# Programação em Python

Pedro Luis Kantek Garcia Navarro
UFPR

1 de agosto de 2019

# Sumário


**1 O século XXI e a computação** **9**
1.1 Representação do conhecimento . . . 9
1.2 A indústria da informação . . . 9
1.3 Componentes: hardware e software . . . 10
1.4 Arquitetura de Von Neumann . . . 11
1.5 Algoritmo . . . 16

**2 Python** **21**
2.1 Porque Python? . . . 21
2.2 Python versus C++ . . . 22

**3 Instalação e alô mundo** **25**
3.1 Versão . . . 25
3.2 sob Windows . . . 25
3.3 Alo Mundo . . . 26
3.4 Winpython . . . 27
3.5 Ipython . . . 27
3.6 Python na WEB . . . 27

**4 Variáveis, sua entrada e saída** **29**
4.1 Atribuição . . . 29
4.1.1 Atribuições Alternativas . . . 30
4.2 Tipos . . . 31
4.2.1 Mudando o tipo . . . 32
4.2.2 Nomes . . . 33
4.3 Expressões aritméticas . . . 33
4.4 Saída de Dados . . . 34
4.4.1 Opções da função print . . . 34
4.5 Entrada de dados . . . 35
4.5.1 Um programa completo usando input e print . . . 36
4.6 Variáveis Lógicas . . . 36
4.6.1 Expressões Lógicas . . . 37

**5 Comandos condicionais** **39**
5.1 Exercício . . . 40

**6 Repetições** **43**
6.1 while . . . 43
6.2 break . . . 43
6.2.1 Repetição aninhada . . . 44
6.3 Continue . . . 44
6.4 For . . . 45
6.5 Exercícios . . . 45

**7 Listas** **49**
7.1 Fatiamento . . . 50
7.1.1 fatiamento em arrays . . . 51
7.2 Mais . . . 52
7.3 Mais sobre listas . . . 52
7.3.1 Usando listas como pilhas . . . 53
7.3.2 Usando listas como filas . . . 53
7.4 Ferramentas de programação funcional . . . 54

7.5 List comprehensions ou abrangências de listas . . . 55
7.5.1 Listcomps aninhadas . . . 56
7.6 O comando del . . . 56
7.7 Tuplas e sequências . . . 57
7.8 Sets (conjuntos) . . . 58
7.9 Dicionários . . . 58
7.10 Técnicas de iteração . . . 59
7.10.1 Métodos de dicionários . . . 60
7.11 Mais sobre condições . . . 61
7.12 Brincando com listas . . . 61

**8 Strings** **65**
8.0.1 String Methods . . . 67
8.0.2 String Formatting Operations . . . 68
8.0.3 Manipulação de bits . . . 69

**9 Funções** **71**
9.1 Mais sobre definição de funções . . . 72
9.1.1 Parâmetros com valores default . . . 72
9.1.2 Listas arbitrárias de argumentos . . . 74
9.1.3 Desempacotando listas de argumentos . . . 74
9.1.4 Construções lambda . . . 75
9.1.5 Strings de documentação . . . 75

**10 Arquivos** **77**
10.1 Métodos de objetos arquivo . . . 77

**11 Pacotes em Python** **81**
11.1 Conceito . . . 81
11.2 Instalação . . . 81
11.3 uma amostra . . . 81
11.4 LISTA DE PACOTES PYTHON . . . 81

**12 Pacote: Numpy** **83**
12.1 Varejão . . . 87
12.1.1 Para gravar arquivo de números . . . 87
12.1.2 Para ler o arquivo acima . . . 87

**13 Exercícios** **89**
13.1 Salada de frutas . . . 89
13.2 pacote no correio . . . 89
13.3 Jogo do Palito . . . 90
13.4 MDC e MMC . . . 91
13.5 Busca . . . 92
13.6 Primalidade . . . 96
13.7 Divisibilidade . . . 101
13.7.1 Números perfeitos, imperfeitos e mais que perfeitos . . . 103
13.8 Geometria analítica 140a, 902 . . . 104
13.9 Dígitos Verificadores . . . 107
13.10Calendários . . . 111
13.11Diagonais, treliças ... (035c) . . . 116
13.12Movimentos no Xadrez . . . 120
13.13Sistemas Lineares e matriz inversa . . . 123
13.14Truques variados de programação . . . 125
13.15Mochila 240a . . . 143
13.16Mínimos quadrados . . . 146
13.17Recursividade: passeio cavalo, caixeiro viajante, hanoi . . . 148
13.18A* . . . 153
13.19Ordenação . . . 157
13.20Sistemas lineares na prática . . . 163
13.21Tomografia computadorizada . . . 166
13.22Cubra os furos . . . 173

**14 Bibliografia** **193**
14.1 Python . . . . . 193
14.2 Algoritmos e programação . . . . . 193
14.3 Métodos Numéricos . . . . . 194

 ©75-18, Pedro Kantek

# O autor, pelo autor

Meu nome é Pedro Luis Kantek Garcia Navarro, conhecido como Kantek, ou Pedro Kantek. Nasci em Curitiba há mais de 60 anos. Sou portanto brasileiro, curitibano e coxa-branca com muito orgulho, mas sendo filho de espanhóis (meus 7 irmãos nasceram lá), tenho também a nacionalidade espanhola. Aprendi a falar em *castellano*, era o que se falava na minha casa, o português é meu segundo idioma, só visto na escola. Estudei no Colégio Bom Jesus e quando chegou a hora de escolher a profissão, lá por 1972, fui para a engenharia civil, mas sem muita convicção. As alternativas: medicina (arghhh!) ou direito (arghhh! arghhh!).

Durante a copa do mundo de futebol de 1974 na Alemanha, ao folhear a Gazeta do Povo, achei um pequeno anúncio sobre um estágio na área de processamento de dados (os nomes informática e computação ainda não existiam). Lá fui eu para um estágio na CELEPAR, que acabou mais de 35 anos depois. Na CELEPAR fui de tudo: programador, analista, suporte a BD (banco de dados), suporte a TP (teleprocessamento), coordenador de auto-serviço, coordenador de atendimento, ... Minha carreira lá terminou na área de governo eletrônico. Desde cedo encasquetei que uma boa maneira de me obrigar a continuar estudando a vida toda era virar professor. Comecei essa desafiante carreira em 1976, dando aula num lugar chamado UUTT, que não existe mais. Passei por FAE, PUC e cheguei às Faculdades Positivo em 1988. Na década de 80, virei instrutor itinerante de uma empresa chamada CTIS de Brasília, e dei um monte de cursos por este Brasil afora (Manaus, Recife, Brasília, Rio, São Paulo, Fortaleza, Floripa, ...). Em 90, resolvi voltar a estudar e fui fazer o mestrado em informática industrial no CEFET. Ainda peguei a última leva dos professores franceses que iniciaram o curso. Em 93 virei mestre, e a minha dissertação foi publicada em livro pela editora Campus (Downsizing de sistemas de Informação. Rio de Janeiro: Campus, 1994. 240p, ISBN:85-7001-926-2). O primeiro cheque dos direitos autorais me manteve um mês em Nova Iorque, estudando inglês. Aliás, foi o quarto livro de minha carreira de escritor, antes já havia 3 outros (MS WORD - Guia do Usuário Brasileiro. Rio de Janeiro: Campus, 1987. 250p, ISBN:85-7001-507-0, Centro de Informações. Rio de Janeiro: Campus, 1985. 103p, ISBN:85-7001-383-3 e APL - Uma linguagem de programação. Curitiba. CELEPAR, 1982. 222p). Depois vieram outros. Terminando o mestrado, rapidamente para não perder o fôlego, engatei o doutorado em engenharia elétrica. Ele se iniciou em 1994 na UFSC em Florianópolis. Só terminou em 2000, foram 6 anos inesquecíveis, até porque nesse meio tive que aprender o francês - mais um mês em Paris aprendendo-o. Finalmente virei engenheiro, 25 anos depois de ter iniciado a engenharia civil. Esqueci de dizer que no meio do curso de Civil desistí (cá pra nós o assunto era meio chato...) em favor de algo muito mais emocionante: matemática. Nessa época ainda não havia cursos superiores de informática. Formei-me em matemática na PUC/Pr em 1981. Em 2003, habilitei-me a avaliador de cursos para o MEC. Para minha surpresa, fui selecionado e virei delegado do INEP (Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais) do Governo Brasileiro. De novo, visitei lugares deste Brasilzão que sequer imaginava existirem (por exemplo, Rondonópolis, Luiziânia, Rio Grande, entre outros), sempre avaliando os cursos na área de informática: sistemas de informação, engenharia e ciência da computação. Atualmente estou licenciado da PUC. Já fiz um bocado de coisas na vida, mas acho que um dos meus sonhos é um dia ser professor de matemática para crianças: tentar despertá-las para este mundo fantástico, do qual – lastimavelmente – boa parte delas nunca chega sequer perto ao longo de sua vida. Em 2018, comecei a dar aulas na UFPR.

O autor, há muitos anos, quando ainda havia cabelo...

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 1

# O século XXI e a computação

## 1.1 Representação do conhecimento

Se olharmos a história deste nosso pequeno planeta e abstrairmos a hipótese Teológica (já que cientificamente ela não tem comprovação) veremos uma história mais ou menos assim:

1. Há coisa de 13.8 bilhões de anos começa a existir o nosso universo. O que havia antes ? Ninguém sabe, se é que existia algo. Como se sabe isso ? Porque se filmarmos o universo agora e voltarmos o filme, tudo converge para um ponto único no espaço passados 13.8 bilhões de anos.

2. 6 bilhões de anos atrás aparece o nosso planeta, ainda como uma bola incandescente de matéria ígnea. A partir disso, ela lentamente começa a esfriar de fora para dentro.

3. Há uns 3.000.000.000 de anos, surgem os primeiros seres vivos, capazes de – entre outras coisas – se reproduzirem por cópia de si mesmos. Aparece aqui o DNA (ácido desoxi-ribonucleico) o elemento comunicador da herança. Foi o primeiro e até hoje bem importante local onde se armazenou o conhecimento.

4. Mais tarde, surge o sexo. Ele tem enorme importância nesta história ao permitir que os filhos herdem um pouco do DNA do pai e um pouco da mãe, acelerando a evolução.

5. Um bocado de tempo depois, surgem os animais superiores e nestes o cérebro passa a ser responsável pelo local onde o conhecimento é produzido e armazenado. Denomina-se esta fase à do conhecimento extragenético.

6. Enquanto limitado ao conhecimento localmente produzido, o cérebro pode armazenar pouco. O próximo estágio de ampliação é quando surge a fala. Agora o conteúdo de um cérebro pode ser repassado a outro, com resultados melhores e crescentes. O nome é conhecimento extrassomático.

7. Com a fala, os dois sujeitos tem que estar tête-à-tête (cabeça a cabeça). A seguir, surge a escrita. Agora a comunicação é possível na modalidade um-muitos (antes era um-um) e mesmo um cérebro morto pode se comunicar pela escrita.

8. Enquanto a escrita é manuscrita, está naturalmente limitada. A próxima novidade é a imprensa que ao automatizar a produção de textos, amplia significativamente o acesso e a disseminação de informações. Outro pontos que não é muito comentado é o barateamento dos livros. Antes uma Bíblia era tão cara, que só paróquias ricas é que podiam comprá-la.

9. No século XX, surge o rádio, o cinema e a televisão. Mais conhecimento se difunde (se é que dá para chamar alguma coisa como o Faustão de conhecimento...)

10. Finalmente, o último estágio da ampliação do conhecimento reside no software. Hoje, quase 30 milhões de brasileiros sabem declarar seu IR, sem precisar fazer um exaustivo aprendizado sobre as regras da declaração, graças a um... software. Quando você vai fazer uma tomografia, o software interpreta os sinais de raio X e cria uma bela imagem do seu interior. O médico que faz o exame não tem a menor idéia de como a máquina opera. Os exemplos são quase inumeráveis. O nome disso é inteligência extrassomática.

## 1.2 A indústria da informação

Durante o século XX a maior indústria foi a do petróleo. Depois, a do automóvel e finalmente no final do século, a indústria de computadores passou a ser a maior. A tendência para o futuro é de que ela suplante todas as demais. Hoje o homem mais rico do mundo construiu a sua fortuna vendendo um software. Outros dois muito ricos fizeram fortuna inventando um produto novo (o Google).

O computador nasce na cabeça de um cientista inglês (Alan Matheson Turing em 1937) e é construído para a guerra pelos ingleses em 1942. A sequência de escopo do computador é

**guerra** a idéia aqui é usar o computador como otimizador dos recursos bélicos, criptografia, pesquisa operacional, tabelas balísticas...→

**aritmética** o computador se transforma em super-calculadora. A matemática passa a ser a linguagem da informática, por excelência. O FORTRAN é dessa época... →

**negócios** em plena sociedade capitalista, os negócios passam a ser otimizados pelo computador. Dessa época é o COBOL a linguagem representante... →

**aldeia global** Negócios, governos, universidades e organizações sociais passam a compartilhar o ciberespaço. Surge e se robustece a Internet... →

**lazer** o computador vira um eletrodoméstico. As casas de classe média passam a contar com um (ou mais de um) computador. Jogos, música, filmes, e-mule, mp3, ... →

**...** →

**realidade virtual** Não se sabe direito o que virá por aqui. As técnicas de simulação levadas ao paroxismo permitirão criar realidades virtuais, com toda a contradição exposta no título. Talvez retornemos à dúvida de Platão (*o universo existe ou é apenas uma sensação que eu tenho?*).

O computador se diferencia de qualquer outra máquina pela sua generalidade. No texto original de Turing isto fica claro pela conceituação de uma máquina universal. Assim, diferentemente de um liquidificador (que só serve para picar comida e tem apenas um botão de liga-desliga), um computador precisa – antes de qualquer coisa – ser programado para fazer algo. De fato, se comprar um computador vazio e ligá-lo, ele não vai fazer nada.

## 1.3 Componentes: hardware e software

Tecnicamente, chama-se a parte física do computador de **hardware** significando ferragem, duro (hard), componente físico, etc. Já a programação recebe o nome de **software** significando mole (soft em oposição a hard), componente lógico, não físico, programa de computador. Às vezes surge também o termo *peopleware*.

A fabricação de hardware é engenharia. Sua produção pode ser planejada e otimizada e isso de fato é feito. A fabricação de software, a despeito de ser chamada de engenharia, cá entre nós, não o é muito. Está mais para arte do que para engenharia.

Talvez, como seres humanos, devamos dar graças aos céus por esta situação. Pois enquanto a produção de hardware é (ou pode ser) em grande parte robotizada, a produção de software ainda exige um bom cérebro cinzento por trás.

As restrições que ainda existem sobre o software e que talvez nunca deixem de existir, impedem a programação dos computadores em linguagem natural. Hoje ainda não é possível dialogar com um computador como se fala com uma pessoa medianamente inteligente. Os computadores ainda não conseguem tal proeza.

Para programar um computador necessitamos uma linguagem. O hardware só entende uma linguagem de pulsos elétricos, chamada de linguagem de máquina. Para facilitar a nossa vida, já que é muito difícil para o homem programar nela, criaram-se programas tradutores que recebem comandos e dados em uma linguagem artificial e a convertem em linguagem de máquina. A maioria desses tradutores recebeu o mesmo nome da linguagem que eles traduzem. Assim, temos o Java, o Cobol, Pascal, Apl, Clipper, Dbase, Basic, Natural, Fortran, C, Php, Lisp, Prolog, Modula, entre outras. Veja no sítio www.tiobe.com o índice TPC que mensalmente lista as 100 linguagens mais usadas no mundo.

Quando os primeiros computadores foram construidos, a única linguagem por eles entendida era a binária. Sequências intermináveis de uns e zeros, algo assim como 0 0 1 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1 0 1 0 1. Era um autêntico samba do crioulo doido. Chamou-se a isto, mais tarde, linguagem de primeira geração.

A seguir, o primeiro melhoramento: o assembler (ou montador), programa que era capaz de entender instruções escritas em uma linguagem um pouco mais humana, e traduzir cada uma destas instruções em sua expressão binária equivalente. Junto com este programa criou-se a primeira linguagem digna deste nome: o assembler, até hoje usado, se bem que muito raramente.

Programar em assembler ainda exige muito talento e paciência. A máquina precisa ser conhecida em inúmeros detalhes de construção, os programas são longos e difíceis –principalmente sua manutenção. Entretanto esta é a linguagem mais eficiente do ponto de vista dos consumo dos recursos da máquina, isto é, ela gera programas velozes e pequenos.

Depois, vieram as linguagens de terceira geração: a primeira foi o FORTRAN, depois COBOL, PL/I, PASCAL, C, C++, Java, LISP, Prolog, Python e outras menos votadas: BASIC, ADA, APL. Há um distanciamento do programador em relação à máquina, e uma aproximação do mesmo em relação ao problema a resolver. Estas linguagens são mais fáceis de aprender e embora gerem programas maiores e mais lentos, aumentam em muito a produtividade humana de escrever código de programação.

Um exemplo diferente para mostrar todos estes conceitos de linguagens poderia ser o seguinte: Suponha um engenheiro brasileiro, que só conhece o idioma português. Ele precisa transmitir certas ordens de fabricação para um colega soviético, que só conhece o idioma russo, com escrita cirílica. Os dois podem tentar conversar quanto quiserem, mas provavelmente não haver nenhum resultado prático útil. É necessária a presença de um tradutor, alguém que ouvindo o português

consiga transformar as ordens em suas equivalentes russas. Finalmente, o engenheiro brasileiro verá se as ordens foram corretamente traduzidas e executadas analisando o resultado final do trabalho.

Neste exemplo, o engenheiro brasileiro é o programador. O colega soviético é a máquina, que ao invés de russo, só entende a linguagem elétrica. O tradutor é a linguagem de programação.

Podemos ainda estabelecer dois níveis para linguagens de programação: baixo e alto. Linguagem de baixo nível é aquela que requer a especificação completa do problema nos seus mínimos detalhes. No nosso exemplo, equivaleria ao engenheiro brasileiro descrevendo tin-tin por tin-tin todos os passos para montar uma engenhoca qualquer. Já as linguagens de alto nível, pressupõe uma tradução "inteligente", o que libera o engenheiro brasileiro de informar todas as etapas. Ele diz o que deve ser feito, sem precisar estabelecer como isto vai ser realizado.

## 1.4 Arquitetura de Von Neumann

A grande sacada de Von Neumann e pela qual ele é lembrado é a de codificar instruções como se dados fossem. Aqui, a genialidade do sujeito. Agora trata-se todo mundo (dados e instruções) como sendo uma coisa só, o que permite o surgimento de programas que geram programas e abre o caminho para o surgimento do software (ou das linguagens de programação). A programação que antes era uma ciência obscura, difícil e somente acessível a poucos, torna-se uma atividade quase trivial.

Todas as linguagens compartilham uma estrutura parecida, já que rodam todas no mesmo computador que é construído usando a chamada Arquitetura de Von Neumann. Bem resumido, essa arquitetura prevê a existência da memória, de uma unidade aritmético lógica, canais e o elemento ativo: a unidade de controle. Essa estrutura comporta os seguintes tipos de comandos ou ordens: entrada-saída de dados, aritmética, movimentação em memória, condicional e desvio.

Com apenas essas 5 ordens, são construídos todos os programas que existem ou que existirão em nosso mundo usando este tipo de computador.

Uma pergunta que se pode fazer aqui, é se é melhor aprender tudo de uma linguagem e se tornar um especialista nela, ou se é melhor conhecer várias, ainda que não chegando a muita profundidade em nenhuma.

Não há resposta fácil, mas apostar todas as suas fichas em uma única pode ser perigoso. A tecnologia tem substituído a linguagem "da vez" mais ou menos a cada 8, 10 anos. Pior, ao se fixar em uma linguagem, corre-se o risco de misturar questões do problema (do algoritmo) com questões do programa (da linguagem).

Como na vida real, parece ser melhor buscar ser poliglota, ainda que obviamente haja uma linguagem preferida. Neste caso, todo o esforço deve ser no núcleo mais ou menos comum a todas as linguagens e deixar em segundo plano o aprendizado das idiossincrasias de cada uma.

Fica claro que programar um computador é "emprestar inteligência ao computador". Ou seja, para programar a solução de um problema, há que saber resolver esse problema. E, não apenas resolver em tese, mas descrever detalhadamente todas as etapas da solução.

De fato, a programação é detalhista ao extremo.

Como se disse acima, o computador surge em 1937, descrito em um artigo denominado "on a computable numbers with an application to the entscheidungsproblem". Este artigo era tão inédito que quase não é publicado: faltavam revisores que o atestassem. O conceito matemático de computador está lá, quase 10 anos de existir algo físico que lembrasse o conceito.

Ao mesmo tempo, o exército nazista alemão começa a usar um esquema criptográfico muito inteligente através de uma máquina denominada ENIGMA, a qual, tinham eles certeza, era inexpugnável. Mal sabiam que do outro lado do canal da Mancha estava Turing. Ele criou um computador, batizado COLOSSUS, que quebrava o código ENIGMA em poucas horas. Foi o primeiro computador construído pelo homem. O ENIAC de que os americanos se gabam tanto, veio depois.

No meio da guerra, Turing foi enviado aos Estados Unidos e lá teve contacto com Von Neumann. Este é o autor da assim chamada arquitetura de Von Neumann, que é a que usamos até hoje em qualquer computador.

**Turing** O verdadeiro construtor do computador, não apenas fisicamente, como logica e portanto, matematicamente. Para saber mais sobre a vida do Turing, leia "Turing e o computador em 90 minutos", de Strathern, Paul.

**a máquina ENIGMA** Como tudo começou

Em 1918 o alemão Arthur Scherbius começou o desenvolvimento de uma máquina criptográfica. Ele havia estudado os fracassos da criptografia durante a primeira grande guerra e pretendia desenvolver um produto superior. Nasceu a ENIGMA: Embora cara (cerca de US$ 35.000 por máquina em valores atualizados), nas duas décadas seguintes ela acabou sendo adotada por todos os corpos militares alemães. Mais de 30.000 ENIGMAS foram construídas e vendidas. Era uma caixa de madeira de 24 x 28 x 15cm pesando 12 quilos com as baterias incluídas. A lógica da máquina: Formada por um teclado contendo as 26 letras e 26 lâmpadas (uma para cada letra), a ENIGMA tinha várias etapas lógicas: As tomadas: Logos depois do teclado, havia uma etapa em que 6 pares de letras eram invertidas por meio de fiações convencionais. Os rotores: Havia um conjunto de 5 rotores, cada um com as 26 letras representadas. Durante a operação, escolhiam-se

3 deles, que eram carregados em uma certa ordem dentro da enigma. O refletor: Depois que o sinal elétrico passava pelos 3 rotores, um último estágio, denominado refletor, mandava o sinal de volta usando outro caminho, até que uma lãmpada acendesse. A Operação: Se a ENIGMA fosse apenas isso, sua decifração não seria complicada, mas a cada letra gerada, o último rotor dava um salto de 1/26 de volta. Quando o último rotor completasse uma volta o rotor 2 dava mais um salto, e assim por diante (como se fosse um marcador de distância de um carro moderno). Com isso a máquina fazia uma cifragem polialfabética de $26.26.26 = 17576 alfabetos$. A Chave: Diariamente, os operadores consultavam um livro de chaves e ajustavam os seguintes parâmetros: os 6 pares de tomadas, os 3 rotores e a sua ordem e finalmente, as 3 inicializações de cada um. A Quebra do código: Graças ao trabalho de diversos criptoanalistas, liderados por Alan Turing, o serviço secreto inglês conseguiu já em 1940 quebrar boa parte do tráfego. Turing projetou (em 1941) e operou o primeiro computador, que ao contrário do que dizem os americanos, não foi o ENIAC.

Para maiores detalhes de como Turing fez isso, leia "O livro dos códigos" ou então "O último teorema de Fermat", ambos de S. Sing.

**Máquina de Turing** Embora a humanidade use o conceito de algoritmo há milênios (O de MDC é devido a Euclides), e o próprio nome algoritmo derive do autor árabe de um tratado de álgebra (por volta de 800 dC), a definição precisa do que seja um algoritmo geral é apenas de 1930. Ela é devida a Turing, através do seu conceito de Máquina de Turing. Esta não é uma máquina real, sendo apenas uma abstração matemática, daí o seu poder de encanto.

Em 1900, o matemático alemão Hilbert apresentou em um congresso uma lista de problemas que segundo ele *estariam ocupando as mentes matemáticas no século que ora se iniciava.* O décimo problema de Hilbert, dizia: **...haverá algum procedimento mecânico geral que possa em princípio resolver os problemas da matemática ?** [1]

Em 1937, Turing respondeu a esta pergunta através do conceito de Máquina de Turing. Ela é composta por um número finito de estados (ainda que possa ser muito grande). Deve tratar um input infinito. Tem um espaço exterior de armazenagem também infinito. Turing imaginou o espaço exterior para dados e armazenamento como sendo uma fita, que pode mover-se para frente e para trás. Além disso a máquina pode ler e escrever nesta fita. A fita está composta por quadrados (ou seja, o nosso ambiente é discreto). Apenas 2 símbolos podem ser escritos nos quadrados da fita, digamos 0 (quadrado em branco) e 1 (quadrado preenchido), ou vice-versa.

Isto posto, lembremos que:

1. os estados internos do aparelho são finitos em número
2. o comportamento da máquina é totalmente determinado pelo seu estado interior e pelo input.

Ou seja, dado o estado inicial, e um símbolo de input, o aparelho deve ser determinista. Logo ele,

- muda seu estado interno para outro, e/ou
- Muda o simbolo que foi lido pelo mesmo ou por outro, e/ou
- movimenta-se para a direita ou para a esquerda, 1 quadrado, e/ou
- Decide se continua ou interrompe e para.

**Definição de uma máquina de Turing** Para especificarmos nossa máquina de Turing, teríamos que escrever algo do tipo

| Estado atual | Sinal lido | faz o que | Vai para estado | Escreve | Anda para onde |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | → | 0 | 0 | D |
| 0 | 1 | → | 13 | 1 | E |
| 1 | 0 | → | 65 | 1 | D |
| 1 | 1 | → | 1 | 0 | D |
| 2 | 0 | → | 0 | 1 | D.PARE |
| 2 | 1 | → | 66 | 1 | E |

Esta definição acima, é adequada para a tarefa de numeração das Máquinas de Turing, fenômeno esse que é central na teoria. Entretanto, para operar com esta máquina, talvez seja mais adequado escrever uma tabela como

| estado | chega | escreve? | anda | vai para |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | D | 0 |
| 0 | 1 | | E | 13 |
| 1 | 0 | 1 | D | 65 |
| 1 | 1 | 0 | D | 1 |
| 2 | 0 | 1 | PARE | |
| 2 | 1 | | E | 66 |

[1] Eis o problema original, como proposto por Hilbert: Determination of the solvability of a diophantine equation: Given a diophantine equation with any number of unkown quantities and with rational numerical coefficients: to devise a process according to which it can be determined by a finite number of operations whether the equation is solvable in rational integers

**Máquina Universal de Turing** O princípio é simples. Teremos uma máquina U, que antes de mais nada lerá as informações na fita de entrada para que ela passe a se comportar como a máquina T. Depois disso vem os dados de input que seriam processados pela máquina T, mas que serão pela U, operando como se fosse a T.

Para ver isso funcionando, precisamos numerar as máquinas de Turing. É preciso um pouco de esperteza aqui. Primeiro, convertamos D, E, PARE, $\rightarrow$ e vírgula como os números 2, 3, 4, 5 e 6. Ou nas nossas contrações como 110, 1110, 11110, 111110 e 1111110. Zero será 0, e 1 será 10, como já vimos. As colunas 4 e 5 nas nossas tabelas não precisam separação, já que o conteúdo da coluna 5 é apenas 1 ou zero e sempre ocupa 1 caracter.

Podemos nos dar ao luxo de não codificar nenhuma seta, nem nada do que as antecede (colunas 1, 2 e 3) desde que organizemos as ordens em rigorosa ordem crescente (e tomando cuidado para preencher ordens que no modo tradicional não eram escritas por nunca ocorrerem na máquina).

Fazendo tudo isso, e escrevendo toda a programação da máquina que soma 1 a um número unário, ela fica:

```
10101101101001011010100111010010110101111010000111010010101 1
10100010111010100011010010110110101010101101010101101010100.
```

Convertendo este número binário para decimal chegamos a 450813704461563958982113775643437908 O que significa que a máquina que soma 1 em unário é a 450. 813. 704. 461. 563. 958. 982. 113. 775. 643. 437.908$^a$ máquina de Turing. Naturalmente, mudando-se (otimizando-se) alguma coisa na programação, esta máquina muda de número.

A máquina que soma 1 em unário é a 177.642$^a$ máquina. A que multiplica 2 em binário expandido é 10.389.728.107$^a$ máquina e a que multiplica por 2 um número unário é a 1. 492. 923. 420. 919. 872. 026. 917. 547. 669 $^a$ máquina.

E assim vai. A $T_7$, é não corretamente especificada, já que existem uma seqüência de 5 uns, e ela emperra ao processar tal seqüência.

Dizendo que quando a n-ésima máquina de Turing atua sobre o número $m$ produz o número $p$, podemos escrever $T_n(m) = p$. Podemos pensar nesta relação como sendo uma função de 2 parâmetros ($n$ e $m$) que leva a $p$. Esta função, pelo que vimos é totalmente algoritmica. Logo, ela pode ser realizada por uma máquina de Turing, a quem chamaremos de $U$. Então, fornecendo o par $(n, m)$ a $U$, obtemos como resposta $p$.

Podemos escrever $U(n, m) = T_n(m)$

A máquina $U$ quando alimentada primeiro com o número $n$, passa a se comportar como a $T_n$

Como $U$ é uma máquina de Turing, ela é uma $T - alguma - coisa$. Quanto é essa alguma coisa ?

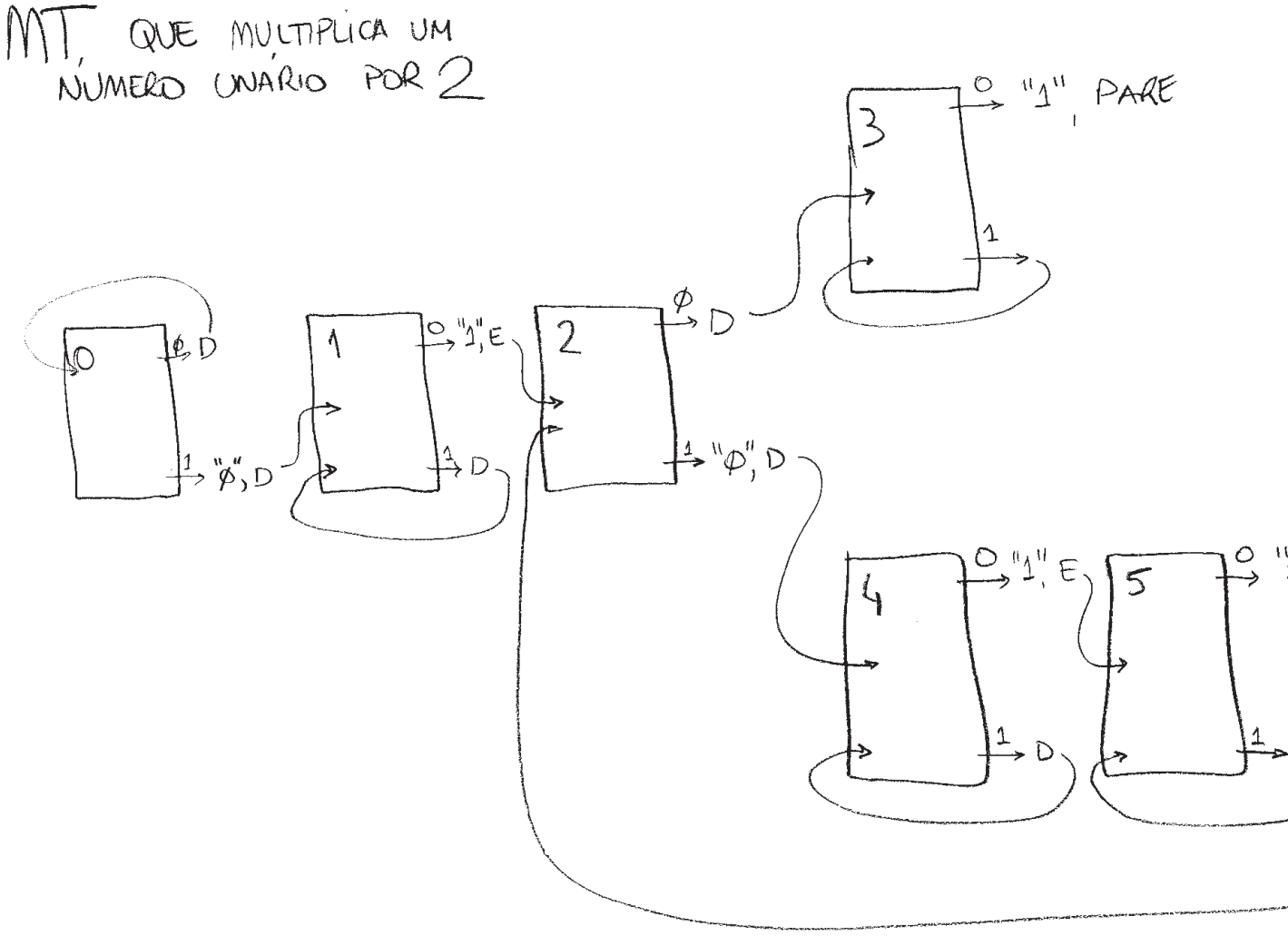
É mais ou menos $7.24 \times 10^{1688}$ , ou seja o número 724 seguido de 1686 zeros.

Todos os computadores modernos, desde um humilde Z80 até um Cray multi-vetorial são máquinas de Turing.

Acabamos de ser apresentados a um moderno computador: em $U(n, m) = p$, $U$ é o hardware, $n$ é o software (ou programa), $m$ são os dados de entrada e finalmente $p$ é o resultado esperado.

Para efeito de entender a MT, pode-se desenhar algo como segue:

 ©75-18, Pedro Kantek




Construir o modelo acima no quadro e depois testar as sequencias 000010000, 00001100000 e 00001110000. Todas vão funcionar.

No WS VIVO802 tem uma função chamada “simula” que recebe uma MT na forma de uma matriz nn × 5, no formato

Outro tema diretamente ligado à Teoria de Turing é

## Teorema de Goedel

Gödel nasceu em 18 de abril de 1906 em Brno atual Rep. Tcheca. Durante toda a sua vida escolar somente uma única vez Gödel deixou de ganhar a nota máxima (e logo em matemática). Foi batizado de criança como *der Herr Warum* (O senhor Por que ?). Apresentou sua tese de doutorado em Viena em 1929. Morreu em 14/01/78 de fome.

Durante sua naturalização, o juiz perguntou a opinião sobre a constituição americana: levou um sabão sobre suas incongruências. tinha medo das emanações venenosas de seu refrigerador morreu em 14/01/78 de fome.

Aliás, buscando inspiração no Congresso de 1900, na virada do século XX para o XXI, um americano rico, deixou 1

milhão de dólares para quem resolver por primeiro 7 problemas ainda pendentes na matemática: O problema P versus NP, além da hipótese de Riemann, a teoria de Yang-Mills (hipótese de lacuna de massa), as equações de Navier-Strokes, a conjectura de Poincaré, a conjectura de Birch, Swinnerton e Dyer e a conjectura Hodge) [2]

- a humanidade usa o conceito de algoritmo há milênios.
- o MDC é devido a euclides e diz

  > o máximo divisor comum de $a$ e $b$, $mdc(a,b)$ é igual ao $mdc(b,r)$ onde $r$ é o resto da divisão de $a$ por $b$

- o nome vem de Al Kowarism - autor de um tratado de álgebra, por volta de 800dc
- definição formal de um algoritmo é devida a Turing - *on computable number, 1937*. Vide a tradução deste artigo em turing0.tex

  > Em 1900, Hilbert apresentou 23 problemas que "ocupariam os matemáticos do século XX"Em 2000 só faltava provar 1, a Hipótese de Riemann. Trata-se de afirmar que a solução da fórmula $\xi(z) = 0$ para $z$ complexo tem a forma $z = \frac{1}{2} + bi$, onde
  >
  > $$\xi(z) = \frac{1}{1-\frac{1^z}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1^z}{3}} + \frac{1}{1-\frac{1^z}{5}} + ... + \frac{1}{1-\frac{1^z}{p}}$$
  >
  > Esta fórmula já está verificada para os primeiros 1,5 bilhão de números primos. Ainda vale 1.000.000 de dólares esta demonstração. Detalhes em www.claymath.org ou no livro...

- A Máquina de Turing é uma construção teórica
- tem um número finito de estados
- fita infinita contendo 0 e 1
- pode ler e escrever em células
- seu comportamento é determinado por estado atual + input, daí
  - muda seu estado e/ou
  - re-escreve o símbolo lido e/ou
  - anda para a direita ou esquerda e/ou
  - continua ou para

  Exemplo de uma MT: vide aula.

  Carregue o WS, veja como_simula, (explica as máquinas MUL2UN e MCDUN...)

  Construa no quadro uma MT (a multiplicação por 2). Faça um exemplo com 0001100000. Deve dar 000001111000000.

# Teorema de Goedel

O segundo problema de Hilbert perguntava se é possível provar que os axiomas da aritmética são consistentes.

Bertrand Russel começou a desenvolver a Principia Mathematica, começando com Peano, formalizando toda a matemática.

### Axiomas de Peano

Eis os axiomas de Peano para os números naturais. Note-se que o símbolo s denota sucessor, um conceito primitivo. O sucessor de 0 é 1, de 1 é 2, ... de n é n+1:
$\forall x \sim (0 = sx)$
$\forall x, y(sx = sy) \Rightarrow (x = y)$
$\forall x, x + 0 = x$
$\forall xy, x + sy = s(x + y)$
$\forall x, yx \times sy = xy + x$
$\forall x, x \times 0 = 0$
$\forall x, x = x$
$\forall xyz, (x = y) \Rightarrow ((x = z) \Rightarrow (y = z))$
$\forall xy, (x = y) \Rightarrow (A(x, x) \Rightarrow A(x, y))$
$(P(0) \wedge \forall xP(x) \Rightarrow P(sx))) \Rightarrow \forall xP(x)$

[2] vide em www.claymath.org as regras do prêmio e a descrição formal deste e de mais 6 problemas:

 ©75-18, Pedro Kantek

Teorema da incompletude de Godel

Godel começou bolando uma tabela de símbolos

| Símbolo | Código | Símbolo | Código | Símbolo | Código |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | ( | 6 | $\sim$ | 11 |
| s | 2 | ) | 7 | $\wedge$ | 12 |
| + | 3 | , | 8 | $\exists$ | 13 |
| $\times$ | 4 | $x$ | 9 | $\forall$ | 14 |
| = | 5 | 1 | 10 | $\Rightarrow$ | 15 |

Usando esta tabela, bolou o número de Gödel de cada expressão, que vem a ser uma soma de potências: A base são os primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13... e os expoentes são os números acima.

Exemplo $\forall x, y; x + sy = s(x + y)$ [Escrito em linguagem matemática]

$x_1 + sx_{11} = s(x_1 + x_{11})$ [Escrito na forma adequada para o teorema de Gödel],

e o número é:

$2^9.3^{10}.5^3.7^2.11^9.13^{10}.17^{10}.19^5.23^2.29^6.31^9.37^{10}.41^3.43^9.47^{10}.53^{10}.59^7$

A relação expressão - número é biunívoca.

Seja PROVA(x,y,z) um predicado, a ser lido:

um numero z, é introduzido na fórmula Y (que tem o número de Gödel y) e sua prova gera o número de Gödel x.

Agora um caso especial: PROVA(x,y,y): vamos alimentar a fórmula Y com seu próprio número G (y) e vamos negar a existência desta prova. Escreve-se $\sim \exists x PROVA(x, y, y)$. Ou seja: x é o número de Godel da prova obtida na fórmula Y usada com o número y

(o barbeiro da aldeia barbeia todos os homens que não se barbeiam...)

Chamando "g"o número de Goedel da prova PROVA(x,y,y).

o teorema: $\sim \exists x PROVA(x, g, g)$. Demonstração: supondo que a expressão acima seja demonstrável e p seu NG. Então PROVA(p,g,g) é verdadeira. A veracidade contradiz $\sim \exists x PROVA(x, g, g)$. Existem teoremas indecidíveis.

## 1.5 Algoritmo

*Algorithms are the most important, durable, and original part of computer science because they can be studied in a language – and machine – independent way. This means that we need techniques that enable us to compare algorithms without implementing them* [3].

Skiena, Steven - The Algorithm Design Manual.

Outra citação, esta do autor Ahmed Shamsul Arefin, diz:

*A good algorithm is like a sharp knife - it does exactly what it is supposed to do with a minimum amount of applied effort. Using the wrong algorithm to solve a problem is trying to cut a steak with a screwdriver: you may eventually get a digestible result, but you will expend considerable more effort than necessary, and the result is unlikely to be aesthetically pleasing.* [4].

Segundo mestre Aurélio, algoritmo é "Processo de cálculo, ou de resolução de um grupo de problemas semelhantes, em que se estipula, com generalidade e sem restrições, regras formais para a obtenção do resultado ou da solução do problema".

Algoritmo é a idéia que está por trás de um programa de computador. É a "coisa" que permanece igual ainda que esteja em um programa Java para rodar num PC em Curitiba, ou esteja em um programa PASCAL rodando em um Cray em Valladolid na Espanha.

Do ponto de vista da informática, algoritmo é a regra de solução de um problema, isto é, surgida uma necessidade buscar-se-á uma solução, ou construir-se-á um algoritmo capaz de solucionar o problema.

Já um programa de computador, (segundo Wirth) "é uma formulação concreta de algoritmos abstratos, baseados em representações e estruturas específicas de dados"e devidamente traduzido em uma linguagem de programação.

Outra definição de algoritmo, esta dos autores Angelo Guimarães e Newton Lages:

Algoritmo é a descrição de um padrão de comportamento, expressado em termos de um repertório bem definido e finito de ações "primitivas", das quais damos por certo que elas podem ser executadas". Para encerrar, e tomando alguma liberdade, podemos considerar um algoritmo como sendo uma receita de bolo.

[3] Algoritmos são a mais importante, durável e original parte da ciência da computação porque eles podem ser estudados em uma linguagem – e máquina – teóricos. Isto significa que necessitamos técnicas que nos permitam comparar algoritmos sem precisar implementá-los

[4] Um bom algoritmo é como uma faca afiada. Ela faz exatamente o que se espera dela com um mínimo de esforço aplicado. Usar o algoritmo errado para resolver um problema é como cortar um bife com uma chave de fenda: você eventualmente obterá um resultado comestível, mas certamente precisará usar mais força do que o necessário e o resultado será muito ruim

O conceito de algoritmo deve ser entendido, para sua correta compreensão, em seus dois aspectos, a quem chamaremos estático e temporal. Na sua visão estática, um algoritmo é um conjunto de ordens, condições, testes e verificações. No seu aspecto temporal, o algoritmo passa a ser algo vivo, pois atua sobre um conjunto de dados de entrada, para gerar os correspondentes dados de saída.

Tais características não podem ser separadas, elas estão instrinsicamente ligadas. A dificuldade em fazer bons algoritmos, é ter em mente, enquanto se escreve o algoritmo (aspecto estático) o que ele vai fazer com seus dados (aspecto temporal).

Vamos exemplificar esta discussão, comentando sobre o algoritmo de solução de uma equação do segundo grau.

Dada a equação $Ax^2 + Bx + C = 0$, para encontrar as duas raizes, segundo a inesquecível fórmula de Bhaskara, procedemos da seguinte forma:

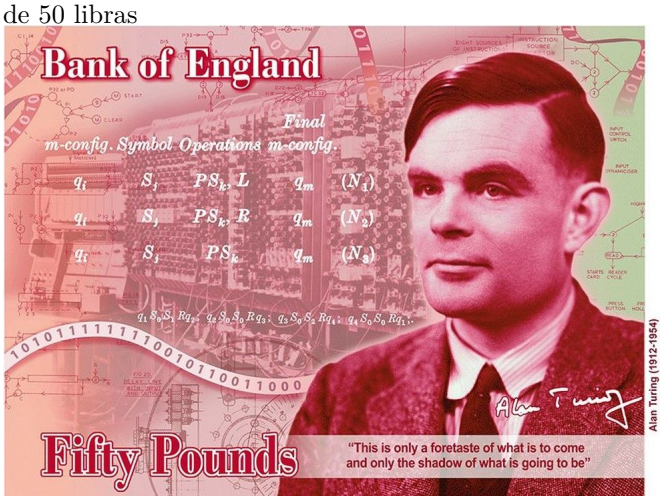
- Calculamos DELTA, que é B ao quadrado, menos o produto de 4,A e C.
- Se DELTA $< 0$, as raizes não existem no campo dos números reais
- Se DELTA $= 0$, as raizes são iguais
- A primeira raiz é (-B) + $\sqrt{DELTA}$ dividido por 2A
- A segunda raiz é (-B) - $\sqrt{DELTA}$ dividido por 2A.

No seu aspecto dinâmico, teríamos que gerar uma série de dados de entrada (triplas A,B,C), seguir o algoritmo, e verificar se os resultados que ele gera são aqueles esperados de antemão.

Dado um problema, para o qual temos que escrever um algoritmo, usualmente não há solução única. Quanto mais complexo o problema a resolver, maior a quantidade de possíveis algoritmos corretos. Cada um certamente terá as suas qualidades e os seus defeitos. Alguns são muito bons, e outros muito ruins, mas entre um e outro existem inúmeras variações, que nem sempre são facilmente reconhecidas.

Pode-se dizer que um algoritmo é um programa de computador do qual se faz a abstração da linguagem de programação. Neste sentido o algoritmo independe de qual será sua implementação posterior. Quando pensamos em algoritmos, não nos preocupamos com a linguagem. Estamos querendo resolver o aspecto "conteúdo". Mais tarde, quando programarmos, a linguagem passa a ser importante, e agora a preocupação é com a "forma".

Finalmente, no século XXI, o Reino Unido resolve tardiamente homenagear Allan Turing colocando sua figura na nota de 50 libras




### O que um computador entende

Baseado na arquitetura de Von Neumann, (um processador, uma unidade de controle, uma ULA, memória e registradores), todo computador construído neste paradigma é capaz de obedecer, lá no nível mais baixo, a um pequeno conjunto de ordens. Note-se como ele é restrito.

**Entrada/Saída** Este tipo de ordem, é para orientar o computador no sentido de adquirir um dado externo (entrada), ou para divulgar alguma coisa que ele calculou (saída).

**Aritmética** Estas ordens são similares aquelas que aprendemos no primeiro grau, e destinam-se a informar ao computador como ele deve efetuar algum cálculo. Estas ordens são: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, funções trigonométricas etc. Não se esqueça que a linguagem universal dos computadores é a matemática. Escrever um programa de computador correto é como demonstrar um teorema.

 ©75-18, Pedro Kantek

**Alternativa** É talvez a ordem mais importante no universo da computação. É ela que dá ao computador condições de "ser inteligente" e decidir qual de dois caminhos deve se seguido. Sempre tem a forma de uma pergunta, seguida por duas ordens distintas. Se a pergunta for respondida afirmativamente, a primeira ordem será executada, e se a pergunta for negada, a segunda ordem será executada.

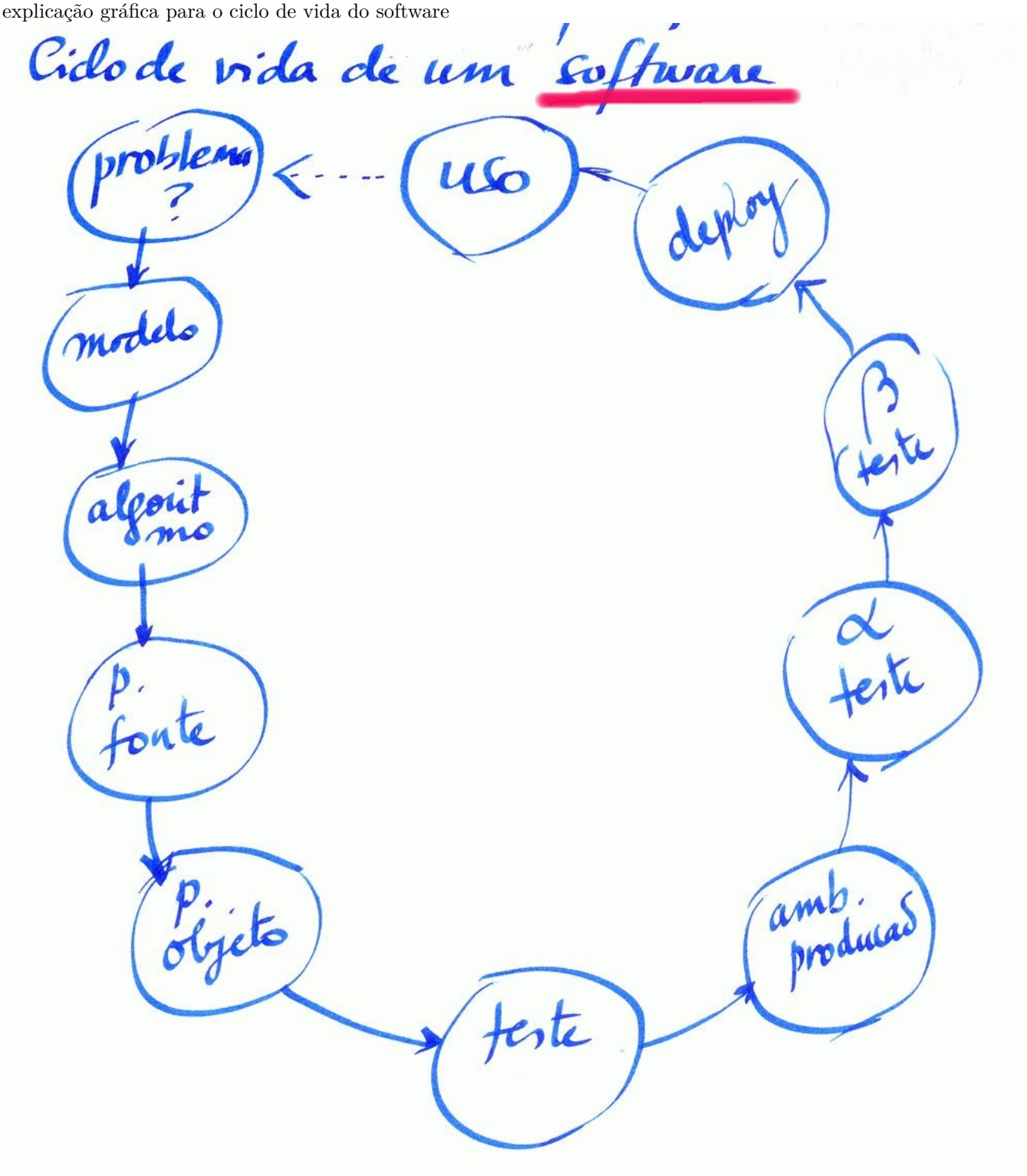
**Desvio** Esta ordem é para dar ao computador habilidade de saltar algumas ordens e executar outras. Um programa de computador nem sempre é obrigado a seguir as instruções sequencialmente começando no começo e terminando no fim. O desvio é potencialmente perigoso quando usado sem critério, e por isso veremos em seguida que uma das regras da programação estruturada é o estabelecimento de rígidos controles sobre os desvios.

**Movimentação na memória** Embora pareça estranho, esta é ordem mais comum em um programa. Considerando o tamanho das memórias de computador e a quantidade de coisas que são lá colocadas, é imprescindível que os programas tenham a habilidade de manusear todas estas coisas. Fazendo uma figura de linguagem, suponha que a memória do computador é um grande supermercado. Se os artigos não puderem se mexer de lugar, bem poucas coisas acontecerão.

Outra observação, é que o verbo "mover", quando usado em manipulações dentro da memória é usado por razões históricas, e certamente contém um equívoco. O correto seria usar o verbo "copiar", já que quando um conteúdo é levado de um lado a outro, sua instância anterior não desaparece. Usa-se aqui uma regra jocosa, mas que sempre é verdadeira. **computador não usa apagador**.

**ciclo de vida**

Qual a história de vida de um programa de computador ? Isto é como nasce, cresce e morre um programa ? uma possível explicação gráfica para o ciclo de vida do software




Grosso modo, pode se dizer que as principais etapas são:

- estudo do problema: Espera-se que haja algum problema ou dificuldade esperando ser resolvido pelo programa de computador. É pré-requisito antes de tentar a solução de qualquer questão, estudá-la, compreender o entorno, as limitações, os balizadores, os recursos disponíveis. Uma boa maneira de estudar e compreender um problema é fazer hipóteses, estudar comportamentos, projetar simulações. Só se pode passar adiante se boa parte do entorno do problema for entendida. Note-se que nem sempre é possível aguardar até ter 100% do conhecimento antes de seguir adiante. Às vezes não dá tempo, mas o percalço principal nem é esse: é que muitas vezes o conhecimento não existe e só vai aparecer quando se cutucar o problema. Como se diz em espanhol *los caminos se hacen al caminar*. Quando isto ocorrer, e ocorre muitas vezes, não tem jeito: anda-se para frente e para trás, e a cada passada o conhecimento é maior.

- bolar ou procurar o algoritmo. Agora é hora de converter a solução encontrada em algo próximo a um algoritmo.

 ©75-18, Pedro Kantek

Isto é, algo formal, com condições iniciais, resultado final, e manipulações entre o que entra e o que sai. Usam-se os comandos permitidos em algoritmos e só estes. Usualmente, há aqui o que se chama de aprofundamento interativo. Começa-se com uma declaração genérica que vai sendo detalhada e especificada até chegar ao nível básico, no qual os comandos algorítmicos (entrada/saída, aritméticos, alternativos, movimentação e de repetição) podem ser usados. Note que pode-se copiar ou aproveitar um algoritmo já existente. Entretanto este re-uso dificilmente é imediato. Sempre há que estudar e eventualmente modificar um algoritmo já existente, a menos que quando este foi feito seu autor já tinha a preocupação com o reuso.

- transcrever em LP. É hora de escolher um computador, um ambiente operacional e sobretudo uma linguagem de programação que esteja disponível e seja conhecida. Dessas 3 opções (computador, ambiente e linguagem) surge a plataforma definitiva: agora é possível escrever, testar, depurar e implementar o programa de computador.
- depurar. Usualmente há uma sequência de testes:
  - compilação correta: nenhum erro apresentado pelo compilador
  - testes imediatos sem erro: testes *ad hoc* para este programa (e só para ele) dão os resultados esperados.
  - teste alfa: um esforço completo de testes, inclusive integrando este programa aos seus antecessores e sucessores. Usualmente o teste é feito pelo(s) autor(es) do programa.
  - teste beta: um teste completo feito por terceiros. Há uma regra aqui de que quem faz (programador) não deve ser quem testa (testador).
- implementar e rodar. Com o programa testado e liberado é hora de rodá-lo em produção. Nesta hora ocorre o que tem sido chamado de *deploy* (dizem as más línguas que sempre associado a seu irmão gêmeo, o *delay*). Dependendo do porte da instalação e do sistema, às vezes esta passagem é complexa e trabalhosa.
- manutenção. Seria muito bom se a história acabasse na etapa anterior. Não é o que ocorre, já que o mundo muda e os programas precisam mudar com ele. Se a manutenção é pequena, usualmente pode-se fazê-la sem muito transtorno, mas caso não seja, este ciclo recomeça. Note-se que após algumas manutenções grandes o programa começa a dar mostrar de instabilidade –a popular colcha de retalhos – e é hora de começar tudo de novo, na nova versão do programa.

**Como se aprende algoritmos?**

Não é fácil aprender algoritmos. No que têm de engenharia, é mais fácil. Há fórmulas, procedimentos, práticas consagradas prontas a serem usadas. Mas, no que são arte, tais receitas desaparecem. É mais ou menos como tentar ensinar alguém a desenhar (outra arte) ou a compor música (outra ainda).

Olhando como se aprende a desenhar, é possível ter alguns *insights*. Aprendizes de desenho copiam desenhos e partes de desenho extensivamente. Pode-se tentar algo parecido aqui.

Em resumo, estas seriam as indicações

- Estudando algoritmos prontos. Pegue bons livros de algoritmos, e estude as implementações que lá aparecem. Transcreva tais algoritmos em um simulador (tipo visualg) ou mesmo em uma linguagem de programação. Execute os algoritmos. Busque entender o que cada parte do mesmo faz. Sugira hipóteses sobre o funcionamento e provoque pequenas mudanças no código para confirmar (ou rejeitar) suas hipóteses.
- Tendo intimidade com algum ambiente de compilação e testes. Esta proposta é importante para poder testar algoritmos. Se ficar embatucado diante de uma simples implementação, você terá grandes dificuldades de escrever algoritmos.
- Escrevendo pequenos algoritmos. Tente fazer os exercícios (começando sempre pelos mais simples) de qualquer bom livro de algoritmos.
- Treinando a interpretação dos enunciados. Enquanto não entender o que deve ser feito, não adianta olhar para o algoritmo, pois o motivador das ações que ele toma estará ausente. Nunca se deve começar a estudar ou a construir um algoritmo se não houver um claro entendimento do que o algoritmo deve fazer.

# Capítulo 2

# Python

## 2.1 Porque Python?

- É uma linguagem moderna (nasceu em 1990) e herdou tudo de bom que as demais linguagens já tinham nessa época. Uma coisa que ela não herdou foi a preocupação exigente de desempenho: Em 90, já havia computação abundante. Com isso a linguagem é redonda e não impõe trancos e barrancos para funcionar. [1]

- Multiplataforma: Unix, Windows, Apple, celular android, raspberry e outros ambientes menos famosos rodam exatamente o mesmo programa.

- Freeware: pode copiar, baixar, instalar, vender, ceder... pode fazer qualquer coisa sem infringir a lei e sem dever explicações a ninguém.

- Uso no mainstream: Olhem o que diz o Philip Guo, um blogueiro da CACM "oito dos top-10 Departamentos de Ciência da Computação e 27 dos top-39 Departamentos de Ciência da Computação das principais universidades nos EUA usam Python nos cursos introdutórios de CS0 e CS1" (CS0 e CS1 são os cursos introdutórios de Computer Science lá). As 39 universidades pesquisadas por ele incluem: MIT, Berkeley, Stanford, Un. Columbia, UCLA, UIUC, Cornell, Caltech, Un. Michigan, Carnegie Mellon, entre outras [2]

- Muito Usada: o índice TIOBE [3] lista o Python como a quinta linguagem mais usada no mundo em 2017. . Em junho de 2018, Python já é a quarta linguagem mais usada. Perde apenas para java, c e c++. E, corre por fora...

  Se você olhar o estudo da TIOBE https://www.tiobe.com/tiobe-index/ verá o bonito papel desempenhado pelo Python.

| Linguagem | 17 | 12 | 07 | 02 | 97 | 92 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Java | 1 | 1 | 1 | 1 | 12 | - |
| C | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 |
| C++ | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| C# | 4 | 4 | 7 | 17 | - | - |
| Python | 5 | 7 | 6 | 11 | 27 | - |
| VB.NET | 6 | 19 | - | - | - | - |
| PHP | 7 | 6 | 4 | 5 | - | - |
| JavaScript | 8 | 9 | 8 | 8 | 19 | - |
| COBOL | 25 | 28 | 17 | 9 | 3 | 10 |
| Lisp | 32 | 12 | 14 | 12 | 9 | 5 |
| Prolog | 33 | 32 | 26 | 15 | 20 | 12 |
| Pascal | 106 | 15 | 19 | 97 | 8 | 3 |

  Consulta em 07/2017

  Uma pequena explicação desta tabela: ela lista de 5 em 5 anos (o que no mundo da computação é quase uma eternidade) a lista dos top-10 ou as linguagens de programação mais usadas. O começo é 1992, e daí de 5 em 5 anos, por 30 anos ou 6 ciclos, até o último em 2017. Diversos fenômenos podem ser observados, eis alguns:

[1] Em compensação, quando se organiza uma maratona de programação, e se precisa estabelecer limites de tempo para concluir que um determinado problema está em loop infinito, impõe-se 1 segundo de CPU quando ele é resolvido em C++ e pelo menos 10 segundos (10 vezes mais) para quando ele é resolvido usando Python.

[2] https://cacm.acm.org/ blogs/blog-cacm/176450 -pyhon-is-now-the -most-popular-introductory- teaching-language-at- top-u-s-universities/ fulltext, acessado em agosto/2017

[3] www.tiobe.com, acessado em agosto/17

  - A performance notável de Java, cuja explicação parece estar na palavra *portabilidade* ou seja o mesmo programa fonte rodando em inúmeras plataformas distintas. Isso é conseguido pelo conceito de java machine. Foge ao escopo deste texto descrever o conceito, mais em resumo é uma capa ou camada de compatibilidade que se adiciona ao ambiente de maneira a tornar ou permitir a mesma coisa sobre coisas diferentes.

  - A derrocada do Pascal, nascido como uma execelente ferramenta de aprendizado e que em algum momento se perde completamente.

  - A consistência de C e seus agregados (c++ e c#), seu sucesso pode ser descrito como eficiência e o possível alto nível de portabilidade.

  - A morte anunciada e posteriormente executada do COBOL. Ele só permanece com alguma relevância graças ao legado ou aos milhões de linha de código que ainda precisam ser mantidos vivos.

  - Quase a mesma coisa pode ser dita das linguagens da inteligência artificial: Lisp e Prolog. Elas migram para a generalidade: Java, C e Python.

  - A irrupção da Internet: PHP, Javascript e Python, por trás dos panos. Inclusive da Internet das Coisas (aqui com Java).

- Pacotes, pacotes, pacotes. A comunidade Python mantém o PYPI (Python Package Index) que é um repositório freeware com pacotes de programação: hoje ele tem mais de 170.000 pacotes. Só para ter uma idéia, um pacote destes, o NUMPY (numerical computation in Python) tem um manual de referência de mais de 1500 páginas.

- Inteligência Artificial: Quando o Google resolveu aposentar o DistBelief e criar uma nova ferramenta de Machine Learning, escolheu a linguagem Python para desenvolvê-la: nasceu o Tensor Flow, que está por trás de inúmeras iniciativas google: tradução, classificação de imagens, elaboração de perfis etc. [4] Logo na entrada do produto o aviso: pode usar em Java, C++ ou Go. Mas, se quiser usar a funcionalidade completa do produto, use-o em Python, que ele está feito nessa linguagem.

- Fácil: parece portugol, ou vá lá: inglêsgol. Não tem caracteres sobrando: sem ponto e vírgula, sem chaves nem colchetes. O que se escreve, ele executa e raramente dá erro.

## 2.2 Python versus C++

Python é muito mais simples e rica do que C++. Permite que pessoas possam programar minutos depois de serem a ele apresentados. Não há regras esquisitas (terminar comandos por ;, abrir e fechar chaves, criar funções como a `main()`, definir variáveis como `int` ou `float`, ou ainda `long`, ou pior `long long`). Python possui inúmeras construções que ajudam muito a escrever programas menores e mais poderosos, como listas, dicionários e conjuntos. Além disso permite que o usuário escreva apenas scripts ao invés de programas completos. Um script é uma sequência simples de comandos, que não precisam ser organizados como programas.

Como não existe almoço grátis, há um aspecto que determina a grande qualidade de C++: a eficiência. Embora dependa de inúmeras características, não erra muito quem afirmar que um programa C++ é entre 10 vezes e 100 vezes mais rápido que seu equivalente em Python. Se pudessemos comparar 2 carros na estrada, o carro python iria a 100 km/h enquanto o carro C++ iria a 1.000 km/h, com o mesmo consumo de combustível no limite mínimo. Se usarmos o limite máximo o carro irá a 10.000 km/h. Curitiba-Nova York em uns 46 minutos.

Este fato, de alguma maneira direciona os objetivos de ambos ambientes: havendo necessidade de eficiência, C++ é o mais indicado. Já quando o problema é muito complexo, ou o programador não é exatamente um profissional da programação, ou a eficiência pode ser desprezada, o Python é o mais indicado.

Conhecer os 2 parece ser o melhor dos mundos: Não é tão difícil, já que ambos estão construídos sob plataformas de Newmann e seus comandos básicos são bem parecidos (cin ou input, cout ou print, for e while praticamente iguais, bem como o if).

Sem contar que conhecer ambos habilita o programador a usar uma das mais simples embora poderosa estratégias de programação tolerante à falha, que é programar a mesma solução em dois ambientes distintos. Na técnica original, deveriam ser dois programadores distintos, mas há resultados impressionantes mesmo quando o programador é o mesmo e apenas as linguagens são diferentes.

A seguir uma tabela de conversões entre um e outro ambiente: Um pequeno auxílio para quem conhece C++ e pretende migrar para Python 3.

[4] www.tensorflow.org

| função | em C++ | Em Python |
|---|---|---|
| Criação da linguagem | C em 1972 (Dennis Ritchie) e C++ em 1983 por Bjarne Stroustrup | Python em 1991 por Guido van Rossum. |
| Tipagem | forte e estática<br>`(int x=10; float y=1.1;)` | forte e dinâmica `(x=10; y=1.1)` |
| Leitura de dados | `#include<iostream>`<br>`cout<<"Informe x";`<br>`int x;`<br>`cin>>x;` | `x=int(input("informe x"))` |
| Impressão de dados | `cout<<"valor = " << x;` | `print("valor = ",x)` |
| aspas | " para strings e ' para 1 caracter | " ou ', tanto faz, desde que pareadas.<br>`x="don't do this"` |
| tipo booleano | Não existe, logo 0 é falso e qualquer coisa diferente de zero é verdadeiro | `True` e `False` |
| igualdade | `==` | `==` |
| atribuição | `=` | `=` |
| origem da contagem | zero | zero |
| divisão | depende dos envolvidos | `/` real e `//` inteira |
| potência | `#include<cmath>`<br>`x=pow(y,3);` | `x=y**3` |
| comando condicional | `if (condição) {`<br>`...`<br>`}` | `if condição:`<br>␣␣␣`...` |
| repetição com while | `while (condição) {`<br>`...`<br>`}` | `while condição:`<br>␣␣␣`...` |
| repetição com for | `for(i=0;i<n;i++) {`<br>`...`<br>`}` | `for i in range(n):`<br>␣␣␣`...` |
| saída incondicional | `break` | `break` |
| saída com re-teste | `continue` | `continue` |
| for como interador | não existe | `for i in [1,2,5]:`<br>`for s in 'Curitiba':` |
| vetor | `int x[10]={0};` | `x=[0]*10` |
| vetor heterogêneo | não existe | `x=[1,2,'oi',3.1]` |
| fatiamento | não existe | `[início:até:incremento]` |
| matriz zerada | `int x[10][20]={0};` | `import numpy as np`<br>`x=np.zeros((10,20),int)` |
| matriz valorada | `float x[2][3]={{10,20,30},`<br>`{40,50,60}};` | `import numpy as np`<br>`x=np.array([[10,20,30],`<br>␣␣␣`[40,50,60]],float)` |
| tabela hash | não existe | `x = {chave:valor, ...}` |
| conjunto | não existe | `x = {valor, valor, ...}` ou<br>`x=set([valor, valor, ...])` |
| pacotes | restritos | 170.000 pacotes, o mundo é o limite |
| objetos | maravilhoso, uso opcional | maravilhoso, uso opcional |
| acentuação | depende de ajustes locais | Unicode e UTF |
| leitura arquivo | `#include<fstream>`<br>`ifstream f;`<br>`f.open("c:/p/file.xxx");`<br>`for(... ) {`<br>`f>>variável;`<br>`}` | `f=open("c:/p/file.xxx","r")`<br>`x=f.readline()`<br>`pa=x.split()`<br>`p=[]`<br>`for j in pa:`<br>␣␣␣`p.append(int(j))` |
| definição de função<br>(não se executa nada depois de return) | `int função(int a, float b){`<br>`...`<br>`return x;`<br>`}` | `def função(a,b):`<br>␣␣␣`...`<br>␣␣␣`return x` |

E, lembre-se, em qualquer caso: *Don't panic!*.

 ©75-18, Pedro Kantek

# Alguns exemplos

**Em C++**

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
float pita(float a, float b){
   return sqrt(pow(a,2)+pow(b,2));
   }
int main(){
   float ca,cb,hp;
   cout<<"Informe o cateto A: "<< endl;
   cin>>ca;
   cout<<"Informe o cateto B: "<< endl;
   cin>>cb;
   hp = pita(ca,cb);
   cout<<"A hipotenusa eh: "<<hp;
}
```

**Em Python**

```
def pita(a,b):
  return (a**2+b**2)**0.5
ca=float(input("Informe o cateto A: "))
cb=float(input("Informe o cateto B: "))
hp=pita(ca,cb)
print("A hipotenusa é: ",hp)
```

---

**Em C++**

```
#include<iostream>
using namespace std;
main() {
   int a[2][3]={1,2,3,4,5,6};
   int i,j,soma;
   soma=0;
   for (i=0;i<2;i++){
      for(j=0;j<3;j++){
  soma=soma+a[i][j];
      }
   }
   cout<<soma;
}
```

**Em Python**

```
import numpy as np
a=np.array([[1,2,3],[4,5,6]])
print(a.sum()) #--ou--
print(sum(a.ravel()))
--------- ou ---------
a=[[1,2,3],[4,5,6]]
i=0
s=0
while i<2:
   j=0
   while j<3:
      s=s+a[i][j]
      j=j+1
   i=i+1
print(s)
```

---

**Em C++**

```
#include<iostream>
using namespace std;
long long modulo = 1e9+7;
long long dp[10101];
long long alfa;
int i;
int main(){
   int n;
   cin>>n;
   dp[0]=1;
   dp[1]=1;
   dp[2]=5;
   for (i=3;i<=n;i++){
    alfa=dp[i-1]+4*dp[i-2]+2*dp[i-3];
    dp[i]=alfa%modulo;
   }
   cout<<dp[n]<<endl;
```

**Em Python**

```
d={0:1, 1:1, 2:5}
def muro(n):
  aa=d.get(n)
  if aa is None:
    d[n]=(muro(n-1)+4*muro(n-2)+2*muro(n-3))%(10**9+7)
    return d[n]
  else:
    return aa
print(muro(..))
```

---

**Em C++**

```
#include<iostream>
#include<fstream>
#include<cmath>
using namespace std;
float dcart(float x1, float y1, float x2, float y2){
    return sqrt(pow((x1-x2),2)+pow((y1-y2),2));
    }
int main() {
    ifstream f;
    f.open("c:/p/n/184/f184001.myd");
    float dab=0,dacb=0,x1,x2,y1,y2;
    for (i=0;i<1000;i++){
 f>>x1;
 f>>y1;
 f>>x2;
 f>>y2;
 dab=dab+dcart(x1,y1,x2,y2);
 dacb=dacb+dcart(x1,y1,0.0,0.0)+dcart(0.0,0.0,x2,y2);
    }
    cout<<dab<<"    "<<dacb;
}
```

**Em Python**

```
import numpy as np
def dcart(a,b):
  return (((a[0]-b[0])**2)+((a[1]-b[1])**2))**0.5
def f184():
  f=open("c:/p/n/184/f184001_exemplo.myd","r")
  i=0
  dab=dacb=0
  while i<1000:
    x=f.readline()
    nums=x.split()
    p1=[int(nums[0]),int(nums[1])]
    p2=[int(nums[2]),int(nums[3])]
    dab=dab+dcart(p1,p2)
    dacb=dacb+dcart(p1,[0,0])+dcart([0,0],p2)
    i=i+1
  print("D1 = ",dab,"  D2=",dacb)
f184
```

---

# Capítulo 3

# Instalação e alô mundo

Python é freeware, não custa nada, você pode copiar e usar para o que desejar, sem pedir licença a ninguém, e pode inclusive cobrar pelo software que você desenvolver usando Python. A partícula *free* em freeware significa liberdade para fazer o que você quiser sem nenhum tipo de restrição e não gratuidade, como alguns pensam.

Existem versões de Python para quase todos os sistemas operacionais conhecidos, eis alguns: AIX (da IBM), AROS (Amiga), AS/400, HPUnix, Linux, MacOS, MS-DOS, OS/2, PalmOS, Playstation, Solaris, VMS, Windows (32 e 64), WindowsCE, entre outros.

Esta multiplicidade de versões acrescenta uma qualidade imensa aos programas Python: desde que eles não usem nenhum recurso específico de uma dessas arquiteturas, serão 100% (ou quase isso) portáveis podendo rodar o mesmo programa em todas essas plataformas.

## 3.1 Versão

As versões de Python são numeradas em 3 níveis: O primeiro número identifica a versão global que atualmente pode ser 2 ou 3. Além das versões 0 e 1, quase experimentais, a linguagem começou sua carreira global com a versão 2, que chegou a ser bastante usada, muito software foi construído com ela, e esse fato impede agora que ela seja totalmente substituída pela versão 3, o que seria o melhor dos mundos. Se você está começando agora, não há o que pensar: deve-se escolher a versão 3. O problema é que na mudança de 2 para 3 perdeu-se alguma compatibilidade o que impede a livre transição de uma a outra. A versão 2 já está com sua sentença de morte estabelecida, ela só será suportada até 2020. Desse ponto em diante quem quiser usá-la o fará por sua conta e risco.

O segundo número indica a sub-versão, que diferencia algum nível maior de correção e sobretudo de lançamento de novidades. Finalmente o terceiro número vai sendo incrementado à medida em que pequenas correções vão sendo construídos. Eis uma pequena versão das modificações:

| | |
|---|---|
| Python 3.6.5 | liberado em 28 Março 2018 |
| Python 3.6.4 | 19 Dezembro 2017 |
| Python 3.6.0 | 23 Dezembro 2016 |
| Python 3.5.1 | 07 Dezembro 2015 |
| Python 3.3.7 | 19 Setembro 2017 |
| Python 3.2.6 | 11 Outubro 2014 |
| Python 3.0 | 3 Dezembro 2008 |
| Python 2.7.8 | 1 Julho 2014 |
| Python 2.6.2 | 14 Abril 2009 |
| Python 2.1.3 | 8 Abril 2002 |
| Python 1.4 | 25 Outubro 1996 |

Existe tamanha diversidade no mundo Python que é impossível tratar todas as alternativas de uso. Primeiro, vai-se escolher o Python 3 e depois vai-se olhar 4 delas: a mais tradicional possível, sob Windows (nas 2 versões, sob 32 e sob 64 bits), também uma instalação alternativa que permite instalar o Python em um pendrive para usá-lo em qualquer computador, mesmo sem os direitos de administrador nesse computador, o Python interativo, além do uso de Python diretamente na web sem instalar nada.

## 3.2 sob Windows

A primeira decisão é sob qual ambiente de windows você está. Uma maneira simples de descobrir é solicitar o *Painel de Controle*, e aqui solicitar a aba *System*. Isto mostra um texto com algumas características do sistema e lá no meio do

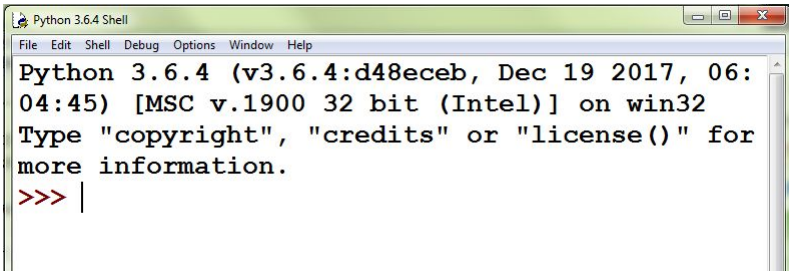
texto, vem a frase “System type”. O que aparecer aí deve servir de guia para a escolha do Python a baixar e instalar: 32 ou 64 bits.

Daí, deve-se ir a `https://www.python.org/downloads/` e escolher a última versão de distribuição. Usualmente há versões mais novas que a última, mas são conhecidas como experimentais e não são recomendáveis, pois ainda não estão cristalizadas ou consolidadas. Deve-se escolher sempre o Python 3 e não o 2, que este vai desaparecer nos próximos anos e só está nessa lista para quem precisa usar e suportar software antigo.

No processo de instalação, especial preocupação deve ser tida ao verificar em qual diretório a instalação vai ser feita. Eu recomendo criar um diretório novo (não usar a sugestão do instalador) no primeiro nível, logo abaixo do nível raiz (como em `c:/python3`). Sob este diretório, o instalador vai criar diversos sub-diretórios (DLL, doc, etc, include, LIB, libs, Scripts, tcl e tools). É importante olhar isto, pois para instalar novos pacotes é preciso entrar no diretório Scripts, como se verá adiante. Logo é preciso saber onde está.

Depois de instalar o Python, deverá aparecer no seu menu inicial um ícone com 2 cobrinhas (uma azul e outra amarela)

o desenho padrão do Python. O nome deve identificar qual a versão instalada e quando se clicar nele deve-se abrir uma tela inicial do python, como em




Nessa tela minimalista, surgem algumas informações como versão, data e hora da liberação desta versão, tipo de sistema sob qual ela está rodando. Depois algumas opções disponíveis e finalmente o símbolo

```
>>>
```

Ele é o *prompt* (prontidão) que é um conceito usado por praticamente todos os softwares interativos para sinalizar ao operador que o software está *pronto* para aceitar e executar comandos. Enquanto este símbolo não aparecer, isso significa que o processador está ocupado fazendo alguma coisa e não pode ser interrompido pelo operador.

Aqui já se podem escrever comandos Python como em

```
>>> 1+2
3
>>>
```

Aqui pediu-se ao Python a execução de $1+2$ e ele respondeu 3, seguido de um novo *prompt*. Esta modalidade de uso do Python e conhecida como interativa e neste caso ele funciona como se fosse uma calculadora. Basta comandar alguma coisa e ele a executará.

## 3.3 Alo Mundo

Tradicionalmente o primeiro programa que um novato deve construir em qualquer novo ambiente é chamado `\index{Alo Mundo}` Sua função é apenas mostrar esta mensagem e sua execução com sucesso sinaliza que o processo de criar um programa fonte, salvá-lo, compilá-lo e depois executá-lo foi bem sucedido. Vamos a isso, então:

1. na tela do Python, escolha `File`
2. no menu que vai aparecer, escolha `New File` e lembre que estes dois passos também podem ser comandados apertando `Ctrl N`
3. Vai-se abrir uma nova tela em branco, muito parecida com a tela do Python. Parece Python, mas não é Python e sim o editor ou bloco de notas do Python[1]
4. Na tela do bloco de notas do Python escreva o seguinte

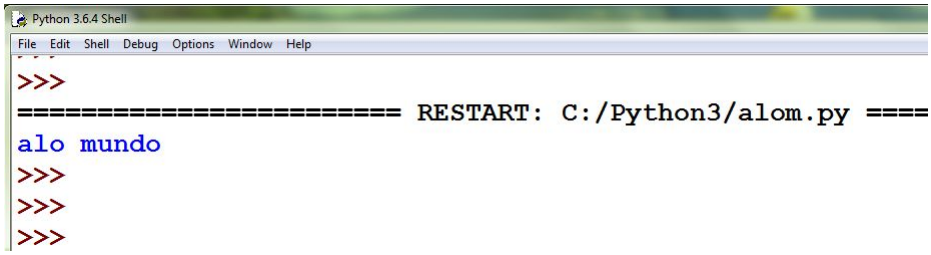
   ```
   print("alo mundo")
   ```

[1] Uma maneira enviezada de identificar qual tela é qual é esta: o bloco de notas do python tem o comando Run enquanto a tela do Python não tem este comando.

5. Agora você vai comandar a compilação (interpretação) e execução desse script (tecnicamente isto não é um programa e sim um script: é uma diferença semântica meio irrelevante, mas será estudada depois). Quem faz isto é a tecla `F5`. Ou também o comando `Run`, já destacado.

6. O Python antes de qualquer coisa vai pedir para você um nome sob o qual o programa (ou script) vai ser salvo. Esta é uma excelente exigência do Python: garante que aconteça o que acontecer, o programa que você escreveu e está tentando executar, será salvo em disco, sem risco de que ele se perca, caso o pior (tela azul da morte, por exemplo) aconteça. O nome que você der terá agregado o sufixo `.py` e será salvo no lugar onde você informar [2]

7. Tendo sido salvo e compilado com sucesso a tela do Python vai mostrar




   Esta tela mostra a execução do script que você criou e a mensagem sendo mostrada.

8. Isto significa que você teve sucesso na instalação do python e na criação e execução do seu primeiro programa.

## 3.4 Winpython

Esta implementação aparece aqui por algumas razões, sendo a principal a **portabilidade** do ambiente de desenvolvimento:

- Permite usar Python em máquinas nas quais você não é o administrador, coisa que o Python padrão exige para ser instalado.
- Como consequência, este Python é portável, e pode ser carregado em um pendrive ou similar, ainda que haja alguma demora no processo de carga: o winpython é enorme.
- Winpython é um ambiente científico, pelo que já vem com SciPi e Numpy devidamente instalados, além de eventualmente outros pacotes importantes.

## 3.5 Ipython

É um python interativo, no qual fica mais evidente o diálogo entre usuário e Python. Na sua versão original (Python) é uma linguagem de programação que conta com um enfoque interativo também. No Ipython, ao contrário, é um ambiente interativo, que por acaso também dá acesso a uma linguagem de programação.

Ele aperece aqui nesta lista pois é a versão disponibilizada nos laboratórios do curso de engenharia elétrica da UFPR. Neste ambiente, eis o caminho das pedras:

1. Usar seu login para entrar no sistema.
2. Na tela de atividades, digitar IP e aguardar. Escolher Ipython.
3. Carregar também o editor GEDIT. Manter ambos abertos. (Ipython e GEDIT)
4. Escrever o código python no GEDIT e salvar o programa e sua execução no diretório /eletrica, com o nome de aa.py
5. Dentro do Ipython executar `%run aa.py`
6. Para corrigir, edite no GEDIT, salve e reexecute dentro do Ipython.

## 3.6 Python na WEB

Uma alternativa disponível a quem tenha acesso à web e não pretenda (ou não possa) instalar nada em sua máquina é usar um ambiente python disponível na web. Há vários, mas um funcional é `https://www.pythonanywhere.com`. Aqui você precisa criar um login e depois disso passa a acessar um ambiente python completo. Já estão instalados nele vários pacotes importantes (teste: numpy, sympy, matplotlib, django). Este ambiente é perfeito para uma consulta rápida.

[2] Sugestão para quem está começando: compre e use um pendrive para guardar seus programas: eles irão com você. Se um dia tiver que ir para uma ilha deserta, o pendrive vai junto. E não esqueça de fazer cópias deles – o famoso backup.

# Capítulo 4

# Variáveis, sua entrada e saída

Uma variável é um objeto do mundo do software que pode ter algumas abordagens. A primeira, é aquela da matemática, quando se escreve $y = f(x)$ e se quer dizer que $y$ é uma variável que depende do valor de $x$. O que existe aí, nessa expressão, é uma função que associa o valor de $y$ ao valor de $x$. Tanto $x$ quanto $y$ nesse enfoque são variáveis: isto é são valores eventualmente desconhecidos, mas que têm um valor qualquer. Outra abordagem é da ciência da computação: nela, uma variável é um pedacinho de memória dentro de um programa (que está devidamente registrado nessa memória) e que armazena um determinado valor. Cada variável precisa ter um nome, para que possa ser referenciada. Esse nome precisa ser único (não se pode ter duas variáveis com o mesmo nome), e depois que ela foi criada, usar essa variável num comando qualquer é exatamente a mesma coisa que usar o valor que a variável tem. Por exemplo, se a variável $A$ tem o valor 10, tanto faz escrever $A + 1$ como $10 + 1$, só que no primeiro caso, a generalidade é maior, pois independentemente do valor que ela tiver, depois de executar $A + 1$, ter-se-á um valor uma unidade maior do que o valor anterior de $A$.

## 4.1 Atribuição

O comando importante aqui é o chamado **atribuição** . É ele que permite:

- criar uma variável
- alterar o valor de uma variável

As duas funções só se diferenciam pelo existência prévia da variável. Se ela não existe, usar a atribuição significa criar a variável. Se ela já existia (e portanto tinha um valor qualquer) usar a atribuição nela vai alterar o valor dela para este, que é citado agora na atribuição.

O formato do comando é

```
variável = valor
```

Onde `variável` é o nome da variável, `=` identifica o comando de atribuição e `valor` é o valor que a variável passará a ter depois desta atribuição. Por exemplo:

| | |
|---|---|
| `A=10` | A variável de nome $A$ é criada (ou alterada) e passa a ter o valor 10. |
| `X=-33.4` | Agora o valor de $X$ é o número negativo -33.4 |
| `NM='alfa'` | A variável agora se chama NM e seu valor é uma palavra, que é 'alfa'. Atente para a presença das aspas, elas se |

Algumas observações importantes. O caráter de atribuição é = e ele é lido como `\index{recebe}recebe`. Então, o comando $A = 10$ deve ser lido como `A recebe 10`. Outra observação é que este sinal tem outras funções no mundo. Por exemplo, na matemática o sinal de igual é isso mesmo: para indicar uma igualdade. Igualdade não é a mesma coisa que atribuição. O problema é que se não se usar o igual, que outro símbolo pode-se usar ? Outras linguagens resolveram esse problema, usando dois caracteres (por exemplo, Pascal usa `:=`) enquanto outras usaram caracteres novos, como por exemplo APL, que usa ←.

A discussão de qual símbolo usar para a atribuição (que lembrando é um conceito que não existe na mátemática) é antiga e poderia ser aberta aqui. Mas, pegando carona no `C`, linguagem avô de boa parte do leque de linguagens usadas no século XXI, (tais como C++, Java, PHP, entre outras), o Python também associou o sinal de = à atribuição. A pergunta é: o que usar quando se falar sobre igualdade entre dois valores ? Neste caso, usam-se 2 caracteres iguais. Então, para perguntar se as variáveis $A$ e $B$ têm o mesmo valor, escreve-se $A == B$, já que se se escrever $A = B$, o que se estará mandando fazer é atribuir o valor da variável $B$ para a variável $A$.

Voltando ao formato do comando de atribuição, acima descrito, vamos estudar o que pode ser `valor` citado no formato do comando. Como o nome sugere, `valor` pode ser um número como 13, 2780.4, -33 e assim por diante. Mas, também pode ser outra variável, como em `A=X`. Aqui se está mandando copiar o valor de `X` para a variável `A`. Note que não se sabe que valor é esse. Não importa, ele é copiado de `X` para `A`.

Finalmente, esse valor pode ser uma expressão aritmética como em `A=11+8`, ou em `A=V-3`, ou finalmente `A=cos(theta)`. No primeiro caso, `A` vale 19, no segundo vale o valor de `V` menos 3 e no terceiro caso `A` vale o coseno do angulo `theta`.

Agora pode-se ver a importância da presença das aspas no comando de atribuição: acompanhe no exemplo `A='alfa'` e `A=alfa`. No primeiro caso, é o conteúdo `alfa` que está sendo atribuído à variável $A$. No segundo pressupõe-se a existência de uma variável de nome `alfa` e é esta variável que tem seu valor (seja ele qual for) copiado para a variável `A`.

As aspas denotam um conteúdo alfanumérico, que estruturalmente é diferente de um conteúdo puramente numérico. Há muitas diferenças que ainda serão estudadas, mas uma importante é que conteúdos (e variáveis) numéricas podem ser usadas em expressões aritméticas enquanto variáveis alfanuméricas causam erros de execução quando se tenta envolvê-las em expressões numérico-aritméticas.

| | |
|---|---|
| `>>> A=5.5` | Cria-se a variável $A$, flutuante, com o valor 5.5 |
| `>>> B='oba'` | Cria-se $B$ alfanumérica contendo 'oba' |
| `>>> A+B` | Tenta-se somar as duas variáveis. Há um erro |

O erro é sinalizado pela mensagem `TypeError: unsupported operand type(s) for +: 'float' and 'str'` cuja tradução é: Erro de tipo: não se pode somar (+) um tipo float com um tipo str.

### 4.1.1 Atribuições Alternativas

O Python, na esteira das linguagens mais modernas, tem diversas alternativas de atribuição, que serão vistas agora. Na minha opinião, este capítulo pode ser ignorado, pois os acréscimos que serão vistos aqui, embora acrescentem riqueza ao ambiente, muitas vezes são únicos do Python e ao usá-los, afastamo-nos da facilidade de transpor nosso código para outras linguagens (C++ ou Java, as maiores candidatas). Eu considero transposição importante, cada um que julgue se deve ou não priorizá-la.

#### Múltiplo assinalamento

Pode-se atribuir o mesmo valor a diversas variáveis:

```
a=b=c=d=0
```

Neste caso, foram criadas (alteradas) as variáveis $a$, $b$, $c$ e $d$ todas com o valor zero.

#### Múltiplo assinalamento com diversos valores

O valor não precisa ser o mesmo, pode variar. Veja no exemplo

```
>>> a,b,c=5.6,0,'alfa'
>>> a
5.6
>>> b
0
>>> c
'alfa'
```

Note que a quantidade de variáveis à esquerda e de expressões à direita precisa ser a mesma, sob pena de um erro como em

```
    a,b,c=1,2,3,4
ValueError: too many values to unpack (expected 3)
```

#### Swap de variáveis

Em programação muitas vezes é necessário inverter o conteúdo de 2 variáveis. Em situação normal, isso exige o uso de uma variável auxiliar como em

```
>>> aux=a
>>> a=b
>>> b=aux
```

Em C++ tem-se o comando `swap(a,b)` que faz isso. Python possui um mecanismo simples para realizar a troca sem usar variáveis adicionais. O mesmo exemplo acima pode ser feito assim

```
a,b=b,a
```

### Cabeça e cauda

Em muitos ambientes de programação, notadamente em programação funcional, baseada em listas, como na linguagem LISP (List Processor) e mesmo na linguagem PROLOG (Processador Lógico) ambas muito usadas no reino da Inteligência artificial, há uma estratégia de programação, fortemente baseada em recursividade e que exige processar um elemento da lista de cada vez, diminuindo-a sempre em direção à lista vazia, que neste caso é o que se chama de *caso básico* (para entender melhor esta abordagem, veja algum texto sobre recursividade). Vou descrever o funcionamento disto como em Lisp, que foi quem começou com essa abordagem. Dada uma lista, por exemplo `[10,20,30,40]`, ela sempre pode ser dividida em cabeça (que em lisp se chama CAR) e corpo (que em lisp se chama CDR). A cabeça é o primeiro elemento da lista e o corpo é o que sobra quando a cabeça é eliminada da lista. Em lisp

```
> (car '(10 20 30 40))
10
> (cdr '(10 20 30 40))
(20 30 40)
```

Em LISP a cabeça é sempre o primeiro, em Python pode ser o primeiro ou o último. Veja na implementação

```
>>> seq=[10, 20, 30, 40]
>>> a,*b=seq
>>> a
10
>>> b
[20, 30, 40]

>>> *a,b=seq
>>> a
[10, 20, 30]
>>> b
40
```

### Assinalar e operar ao mesmo tempo

Em programação é muito frequente escrever `a=a+1`. Este comando em Python pode ser escrito como `a+=1`. Note que o perigo reside – numa distração – em inverter os dois sinais. Ao se escrever `a=+1` está-se comandando outra coisa: a criação (ou alteração) da variável $a$ com o valor de $+1$. Veja o perigo: você cometeu um erro, e o Python não avisa, faz o que você mandou (como sempre), mas eventualmente não era isso que você queria.

O par de sinais pode ser `+=`, além de `-=`,`*=`,`/=`,`%=`, `//=`, `**=` entre outros.

### Exclusão de variável

Embora não seja usual, o programador pode excluir as variáveis quando estas deixarem de ser úteis. Não é usual, pois ao encerrar o Python automaticamente tudo o que foi usado é excluído e os recursos liberados. Mas, havendo necessidade o programador pode excluir variáveis com o comando `del`. Veja-se

```
>>> a=5
>>> b=6
>>> del a,b
>>> a
NameError: name 'a' is not defined
```

## 4.2 Tipos

Graças a essa distinção vista acima, pode-se pontuar a respeito de uma característica importante das variáveis. Cada variável terá um tipo que sinalizará como ela será manipulada depois de criada. Os principais tipos são: numérico inteiro, numérico real, alfanumérico e lógico.

Ao contrário de outras linguagens (como o C, por exemplo), as variáveis em Python não têm um tipo explicitamente declarado. É o seu valor que determina qual é o seu tipo. Tecnicamente esta característica é conhecida como tipagem dinâmica[1]. Então,

[1] Esta regra nem sempre é verdadeira, por exemplo, ao usar o pacote Numpy. Mas, por enquanto pode-se aceitá-la como verdadeira.

| | |
|---|---|
| `A=10.3` | A é uma variável do tipo real, que em Pythons é conhecida como `float` |
| `B=5` | A variável $B$ é do tipo inteiro. |
| `C=10.0` | A variável $C$ é tipo float |
| `HAL='ivo viu a uva'` | A variável HAL contém a frase `ivo viu a uva` |
| `GA=True` | GA é uma variável do tipo lógico que tem o valor de verdadeiro |
| `J=False` | J é uma variável do tipo lógico e tem o valor Falso |

A variável do tipo lógico só admite dois valores `True` e `False`. Obviamente, estes dois nomes não servem para dar nomes a variáveis. É isto que se chama de palavra reservada .

Os tipos numéricos podem ser inteiros (`int`) ou reais, que no Python recebem o nome de `float`. Poder-se-ia argumentar que o tipo inteiro é desnecessário (já que o conjunto dos reais contém o conjunto dos inteiros ou $\mathbb{R} \subset \mathbb{Z}$), mas isto não é verdade, já que:

- Dentro do computador, a matemática inteira é dezena de vezes mais rápida que a matemática real. Então quando aplicável, sempre vale a pena ser mais eficiente.
- Mas, principalmente, o conjunto dos inteiros tem uma característica que o real não tem: a enumerabilidade. Tal característica é muito importante (por exemplo, na indexação) e ela exige que o tipo seja inteiro em certos momentos.

Feita esta distinção, os conteúdos que uma variável numérica pode ter são:

**inteiro** : os 10 dígitos `0,1,2,3,4,5,6,7,8 e 9`, um sinal opcional `+ ou -`.

**flutuante** : os mesmos dígitos e sinal e além destes, o sinal de ponto decimal. Note que usa-se em Python o ponto decimal e não a vírgula decimal, herança dos países de língua inglesa. Opcionalmente pode-se ter a letra `E` ou `e` significando exponencial. E, se presente, indica o expoente de 10, que deve ser multiplicado pelo número antes do E. O expoente também pode ter opcionalmente um sinal que pode `+` ou `-`. Exemplos:

| | |
|---|---|
| `3E4` | Significa $3 \times 10^4$ ou 3000 |
| `-4E2` | $-4 \times 10^2$ ou -400 |
| `5E-3` | $5 \times 10^{-3}$ ou $5 \times \frac{1}{10^3}$ ou ainda $5 \times 0.001$ que é 0.005. |

### 4.2.1 Mudando o tipo

O tipo pode ser modificado, por exemplo em

| | |
|---|---|
| `A=9` | Cria-se a variável $A$ como inteiro |
| `B=6.5` | Cria-se $B$ como flutuante |
| `A=B` | $A$ que era inteiro passa a ser flutuante, pois recebeu 6.5 |
| `A='Curitiba'` | $A$ agora é uma variável string |
| `A=False` | Finalmente, $A$ agora é uma variável lógica |

Nenhuma dessas modificações causa algum tipo de erro ou de manifestação do Python. São ações normais e corriqueiras.

Em alguns momentos da programação, é necessário explicitamente modificar um tipo de variável. Esta necessidade já vai aparecer (ao tratar o comando `input`, por exemplo), mas ela vai ser vista aqui do ponto de vista formal. Para mudar o tipo de uma variável pode-se usar

| | |
|---|---|
| `int(x)` | Pega o conteúdo de $x$ e transforma-o (se possível) em um inteiro. |
| `float(x)` | Transforma $x$ em flutuante |
| `str(x)` | Transforma $x$ em uma string |

Obviamente a transformação só vai acontecer se ela for possível. Não adianta, por exemplo, definir `A='alfa'` e pedir `int(A)`, já que 'alfa' não pode ser transformada em um número inteiro. Mas, se `B='123'` deve-se notar que $B$ é uma variável string (por causa das aspas), mas ela pode ser transformada em inteira e neste caso, valerá 123, pois só é formada por dígitos numéricos. Já a conversão em string é sempre possível, e sempre que for ordenada será realizada.

Para a representação de números inteiros o Python usa um sistema de precisão ilimitada, que permite usar muitos (muitos !) dígitos, veja-se por exemplo o fatorial de 50 é
`30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000`. O programador não precisa fazer nada (ao contrário de outras linguagens mais antigas como C ou C++). O Python simplesmente lança mão de quantas casas forem necessárias para a representação numérica inteira pedida.

Já na representação flutuante, podem surgir problemas derivados do fato de que o Python usa para representação interna um formato binário limitado composto de abcissa e mantissa. Em outras palavras, um número flutuante usa uma quantidade finita de bits para ser representado, o que faz com que haja perda de precisão nessa representação. Veja-se um exemplo prático (uma sessão real de Python)

```
>>>   a=0.1
>>>   print("{:2.5f}".format(a))
0.10000
>>>   print("{:2.30f}".format(a))
0.100000000000000005551115123126
```

O comando format acima, parece, e é, bem misterioso, mas o que ele pede é algo prosaico, que a variável $a$ seja impressa, no primeiro caso, com 5 decimais e no segundo com 30 decimais. Observe o que aconteceu. O surgimento de números (aparentemente aleatórios) a partir da $18^a$ casa é resultado de imprecisões derivadas do uso do tipo flutuante. Perceba-se que não deve haver maiores problemas: um erro na $18^a$ casa não é para preocupar mas, ele está lá.

Finalmente, o Python trabalha em aritmética complexa sem nenhuma especificação prévia a não ser o uso de variáveis numéricas complexas. (A regra como sempre é: basta que um operador seja complexo para que haja a conversão de toda a expressão para complexo). Ao contrário do usual, a unidade imaginária aqui é `j` ao invés de i, e uma única diferença precisa ser tratada: o número 1+i em Python precisa ser escrito como `1+1j`, já que se você escrever apenas `1+j` o Python vai achar que quer somar 1 na variável `j`.

### 4.2.2 Nomes

A regra para dar nomes em Python (regras essas que se aplicam à nomeação de variáveis) são simples:

- uma única palavra, ou seja não se admitem espaços em branco dentro dos nomes.
- pode-se usar o caracter sublinha (`_`) para separar palavras no nome
- o primeiro caractere deve ser uma letra
- depois do primeiro pode-se usar letras ou números
- Letras maiúsculas são diferentes das letras minúsculas (ou seja `OBA` é diferente de `Oba` que não é a mesma coisa que `oba`).

O leitor não deve se preocupar muito com estas regras, substituindo-as por algum bom senso: os nomes devem ser autodeclarativos (sobre para que serve a variável), com nomes nem muito grandes (provocam erros de digitação) nem muito pequenos (para que serve mesmo a variável $B$ ?). Uma regra muito usada por aí sugere usar várias palavras ou abreviaturas no nome, separando umas das outras pelo uso de maiúsculas. Usando esta regra pode-se ter

| | |
|---|---|
| `SaldoConta` | uma variável para conter o saldo da conta |
| `LucroAntesIR` | auto-explicativo |

Os detratores da regra acima dizem que não se deve misturar maiúsculas e minúsculas no nome, pois isto acaba sendo uma fonte de erros de digitação. Estes dizem que as variáveis devem ser todas minúsculas ou todas maiúsculas.

Enfim, a sugestão aqui é que cada leitor deve definir a sua regra de formação de nomes e se ater a ela, sempre visando a minimização dos erros de digitação.

A partir da versão 3, o Python pode aceitar caracteres acentuados na formação de nomes, pois aqui por padrão usa-se o conjunto de caracteres Unicode, através do Unicode Transformate Format-8 (UTF-8). Mas, pensando francamente, não parece ser uma boa idéia: se você definir uma variável de nome `SAÍDA` e depois chamá-la de `SAIDA`, para o Python serão duas variáveis distintas, e portanto aqui está uma nascente fonte de problemas. Tente não usar caracteres acentuados ao programar. Você não vai se arrepender. Conteúdos dentro de aspas (constantes) podem e devem usar caracteres acentuados: vamos homenagear a Língua Portuguesa, e dentro das aspas não se corre nenhum perigo. Como em `ESTADO='Paraná'`.

## 4.3 Expressões aritméticas

As variáveis e constantes numéricas podem ser operadas e interligadas usando-se as operações aritméticas usuais (e algumas não tão usuais) da matemática convencional. Para isso são usados os símbolos a seguir descritos, que buscam seguir – tanto quanto possível – as convenções usuais da escrita matemática. Por exemplo

```
>>> a = 5
>>> b = 3.6
>>> a + 4
9
>>> b * 3
10.8
>>> (a + b) / 2
4.3
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
>>> a - 6
-1
>>> a - -8
13
```

Note que a adição é representada pelo sinal de "mais" (+), a subtração por "menos" (−), a multiplicação pelo asterísco (∗) e a divisão real pela barra (/).

Note também que a prioridade é determinada pelo uso de parênteses, que as vezes é redundante, mas nem sempre, pois se o comando fosse escrito como $2 + 8/2$ sem parênteses, o Python primeiro faria a divisão de $8/2$ dando 4 e depois a soma de 2 com 4 resultando 6. Ao se escrever $(2 + 8)/2$ primeiro a soma dando 10 e depois a divisão por 2, que dará 5 de resposta final. A seguir, uma tabela de algumas operações aritméticas:

| Símb | Nome | Como funciona |
|---|---|---|
| + | adição | em $a + b$ o resultado é a adição entre $a$ e $b$. |
| − | subtração | em $a - b$ o resultado é $a - b$. |
| ∗ | multiplicação | Em $a * b$ o resultado é a multiplicação de $a$ e $b$. |
| / | divisão real | Em $a/b$ o resultado é um `float` contendo a divisão de $a$ por $b$. |
| // | divisão inteira | Em $a//b$ o resultado é um inteiro contendo a divisão inteira de $a$ por $b$. |
| % | Resto | Em $a\%b$ o resultado é o resto da divisão inteira de $a$ por $b$, sendo que é um valor $0 \leq resto \leq b - 1$. |
| ** | Potência | Em $a * *b$ o resultado de $a^b$. |
| *abs* | Módulo | Em $abs(a)$ o resultado é $-a$ se $a$ é negativo e $a$ se $a$ é positivo. |

Note a diferença entre as duas divisões

```
>>> 10/3
3.3333333333333335
>>> 10//3
3
>>> 10%3
1
```

## 4.4 Saída de Dados

Todo programa durante sua execução deve em princípio divulgar alguma coisa. Afinal para algo ele está sendo executado. Ainda que haja quase infinitas possíveis aplicações de programas, grande parte deles vai precisar dizer algo. Uma diferença importante entre Python 2 e Python 3 é que no 2, os parâmetros de print seguem o nome da função sem parênteses enquanto que os parênteses são obrigatórios no Python 3. Aliás este é um dos mecanismos para identificar se um programa originalmente foi escrito em 2 ou 3.

A maneira mais simples de obter o conteúdo de uma variável é apenas digitando seu nome seguido de ENTER. Veja

```
>>> a = 5
>>> b = a+2
>>> b
7
```

Uma maneira mais elaborada de saída é com o comando `print()`. É muito rico, com múltiplas opções, mas vamos começar lentamente. Na sua versão mais simples, o print admite uma lista de variáveis e eventualmente constantes a serem escritas na saída padrão quando o programa for executado. A saída padrão é um conceito importante em computação pessoal: trata-se do dispositivo que o computador usará para todas as saídas, quando nada for afirmado sobre ONDE fazer a saída. Em computação usa-se o conceito de *default* nestes casos. Então a saída *default* é conhecida como saída padrão e quase sempre é o monitor de vídeo. Vejam-se alguns exemplos

| | |
|---|---|
| `print(a)` | Imprime o valor da variável $a$. |
| `print("o valor de a: ",a)` | Agora antes do valor da variável $a$, imprime-se a mensagem entre aspas. Ajuda a identificar as saídas |
| `print("a: ",a,"b: ",b)` | Imprime $a$ e $b$ identificando cada uma delas |
| `print("Desligue agora")` | Imprime apenas a mensagem |
| `print("Resultado ",x+22)` | Imprime a mensagem e depois o resultado de x+22. Note que o valor de $x$ permanece inalterado |

### 4.4.1 Opções da função print

Dentro do parênteses da função print, podem-se colocar algumas opções, a saber: `sep=` que indica qual o separador entre itens na função print. Por *default* é um espaço em branco, mas pode ser qualquer coisa. Veja os exemplos

```
>>> a=5
>>> b=6
>>> print(a,b)
5 6
>>> print(a,b,sep="#")
5#6
>>> print(a,b,sep="oba")
5oba6
>>>
```

Outra opção importante refere-se ao terminador da função. `end="\n"`. Por default, é uma ”nova linha”, que em programação é reconhecida pelo caracter barra ene. Mas, pode ser qualquer outra coisa. Chamar `print()` sem nenhum parâmetro, é o mesmo que chamar print com o parêmtro end. veja no exemplo

```
print("ufa",end="#")
ufa#
```

Finalmente, a terceira opção que vamos estudar é `file="nome"`. Ela indica para onde vai ser mandado o resultado de print. Se nada é dito, ele sempre vai para `sys.stdout` que é o nome oficial da saída padrão. Mas, o print pode ser mandado para qualquer lugar. Veja no exemplo

```
>>> saida=open("c:/p/python/saida","w")
>>> print("oba",file=saida)
>>> saida.close()
>>> saida=open("c:/p/python/saida","w")
>>> a
5
>>> print(a,file=saida)
>>> saida.close()
```

## 4.5 Entrada de dados

A grande maioria dos algoritmos (programas) precisam obter algum dado do operador antes de realizar o processamento. O comando básico aqui é `input`. Seu formato sempre será

```
variavel = input("mensagem")
```

O que acontece aqui:

- A mensagem citada no comando é impressa na saída padrão
- O programa é interrompido neste ponto
- depois que o usuário digitar alguma coisa e teclar `ENTER`, o que foi digitado é colocado na variável citada no comando
- O processamento segue sem mais interrupções.

Um detalhe importante é que os conteúdos SEMPRE serão carregados no formato de string. Sem transformações, estas variáveis não podem ser usadas, por exemplo, em computações numéricas. Para tanto elas deverão ser transformadas usando (entre outras) as funções: `int` converte algo para inteiro, `float` converte algo para flutuante, e já que estamos estudando conversões, tem-se também `str` que converte algo para string. Veja alguns exemplos

```
>>> idade=input("entre com a idade ")
entre com a idade 33
>>> idade
'33'
>>> idade=int(input("entre com a idade "))
entre com a idade 33
>>> idade
33
```

Perceba que no primeiro caso (sem a transformação `int`) a variável idade é do tipo string, o que se pode perceber nas aspas que são mostradas (’33’). No segundo caso, em que há a transformação de string para inteiro (representada pela chamada à função `int`, o conteúdo da variável é um número e portanto pode ser operada aritmeticamente.

### 4.5.1 Um programa completo usando input e print

Seja um programa para pedir o raio de um círculo e imprimir a área do mesmo usando a fórmula da geometria

$$S = \pi \times R^2$$

```
def area():
  a=float(input("Informe raio"))
  s=3.1415 * a
  print("a área é: ",s)
area()
```

Mais um exemplo

```
def prim2(n):
  import math
  if n==1:
    return False
  if n<4:
    return True
  if n%2==0:
    return False
  if n<9:
    return True
  if n%3==0:
    return False
  r=math.floor(math.sqrt(n))
  f=5
  while f<=r:
    if n%f==0:
      return False
    if (n%(f+2))==0:
      return False
    f=f+6
  return True

def enesprim(qual):
  count=1
  candidato=1
  while count<qual:
    candidato=candidato+2
    if prim2(candidato):
      count=count+1
  return(candidato)

aa=int(input("Informe qual a ordem do primo "))
bb=enesprim(aa)
print(bb)
```

Neste exemplo primeiro define-se a função prim2 (bastante otimizada) que recebendo um valor qualquer informa se ele é ou não é primo. Depois define-se a função enesprim que recebe um n[umero inteiro $x$ e devolve o $x$-ésimo número primo. Finalmente, o script pede um número qualquer em $aa$, e com ele calcula o $aa$-ésimo número primo, e o joga em $bb$. Depois este número é impresso.

## 4.6 Variáveis Lógicas

Uma outra família de variáveis são as variáveis lógicas, geralmente obtidas como resultado de uma comparação ou pergunta. Essas variáveis só podem ter 2 valores que são Verdadeiro (em Python `True`) e Falso (`False`).

Usualmente, estas variáveis são obtidas ao operar condições. As principais condições em Python são

| Símb | Nome | Como funciona |
|---|---|---|
| == | Igual | Em $a == b$, a resposta será True se $a$ for igual a $b$ e False em caso contrário. |
| > | Maior | Em $a > b$ a resposta será True se $a$ for maior do que $b$. Será False em caso contrário. |
| < | Menor | Em $a < b$ a resposta será True se $a$ for menor do que $b$. Será False em caso contrário. |
| >= | Maior ou igual | Em $a >= b$ a resposta será True se $a$ for maior do que ou for igual a $b$. Será False em caso contrário. |
| < | Menor ou igual | Em $a <= b$ a resposta será True se $a$ for menor do que ou igual a $b$. Será False em caso contrário. |
| ! = | Diferente | Também conhecida como não igual, ela responde o contrário da operação igual ==. |

### 4.6.1 Expressões Lógicas

Quando há necessidade de expressar condições compostas, as operações acima podem ser conectadas usando-se 3 conectores lógicos que são:

| Símb | Nome | Como funciona |
|---|---|---|
| and | E | Em $c1$ *and* $c2$, o resultado será verdadeiro se ambas, $c1$ e $c2$ forem verdadeiras e Falso, senão |
| or | OU | Em $c1$ *or* $c2$, o resultado será verdadeiro se $c1$ for verdadeiro, ou se $c2$ for verdadeiro ou se ambas forem verdadeiras. Será falso em caso contrário. |
| not | NÃO | Em *not* $c1$ o resultado será verdadeiro se $c1$ for falsa e será falsa se $c1$ for verdadeiro. Note que este operador é unário (só se aplica a uma condição). |

Deve-se lembrar que estas operações e conectores estão definidas na matemática, particularmente na lógica de predicados. Lá seus símbolos são: $\wedge$ para o conectivo E, $\vee$ para o conectivo OU e finalmente o símbolo $\sim$ para a negação lógica.

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 5

# Comandos condicionais

Uma característica onipresente em linguagens de programação é a capacidade de executar ou não um conjunto de instruções a depender de uma variável lógica. Dizendo de outra maneira, pode-se comandar uma condição qualquer e se ela for verdadeira (que no Python é `True`) então um conjunto de instruções será executado. Se a condição for falsa (em Python `False`), ou nada é executado, ou também pode ocorrer, um segundo conjunto alternativo de instruções é executado.

O comando condicional por excelência em Python é `if` e ele têm o seguinte formato

```
if condição:
   comando_1
   comando_2
   ...
comando_n
```

Para escrever o comando, deve-se substituir a palavra condição por alguma condição relacional ou lógica, que ao final informe um valor `True` ou `False`. A regra é que os comandos 1, 2, ... só serão executados se a condição for `True`. Já ao final do bloco, o comando $n$ será executado sempre independentemente da condição. Quem determina se o comando está ou não vinculado ao $if$ é o espacejamento no início da linha, chamada em programação de indentação.

Em outras linguagens, usam-se caracteres delimitadores para os blocos de comando ({ e } em C, Java e C++; *begin* e *end* em Pascal e Delphi), mas em Python consoante com a proposta de limpeza da linguagem, usam-se as margens para determinar as condições.

Como tudo na vida isto tem vantagens e desvantagens. Começando pelas primeiras, o código fica limpo e legível. Quem sempre exigia dos programadores que respeitassem as margens, agora ganha um aliado importante: se as margens forem bagunçadas o programa não funcionará bem. Além disso economizam-se caracteres dispensáveis.

Já a desvantagem decorre principalmente da inabilidade de muitos ambientes para manusear este tipo de arquivo. Muitos editores se arvoram em trocar um certo número de brancos por um ou mais caracteres de tabulação, e fazer isto é receita quase certa para problemas de operação dos programas. Além disso, muitos gerenciadores de download deixam de respeitar essas margens, fazendo com o que o recebedor de um programa fonte Python copiado da Internet, tenha sempre que revisar com cuidado o resultado de descargas de código, o que nem sempre é fácil ou trivial.

Veja alguns exemplos

```
a = 5
if a==6:
   print('ufa')
print('agora')
```

Primeiro $a$ recebe 5. Daí 5 é comparado para igual com 6. A resposta é `False`. Com isso, os comandos identados abaixo não são executados (no caso print('ufa')). Finalmente é impresso 'agora' já que esta impressão independe do resultado da comparação.

Quem inicia um bloco indentado é a presença dos dois pontos : após a condição. Ele sinaliza ao editor em uso que a seguir deve-se respeitar a nova margem. Quando o programador quiser encerrar o bloco (e por conseguinte, a condição) ele terá que recuar manualmente o cursor até o início da linha.

Um segundo formato para o comando condicional, conhecido como condicional composta é aquele que apresenta uma condição e dois caminhos: um para o True e outro para o resultado False. Agora a separação entre um e outro é sinalizado pela palavra `else` que também deve ser seguida por dois pontos. Acompanhe no exemplo

```
a = 7
if a>3:
   print('oba')
else:
   print('ufa')
print('foi')
```

Acompanhe o raciocínio: Primeiro $a$ é comparado com maior para 3. A resposta é `True` já que $7 > 3$ e com isso a impressão de 'oba' é feita. Como o resultado foi True, salta-se o bloco referente ao else:. Encerra o comando a impressão de 'foi' que independe do resultado da comparação. Veja agora um trecho parecido

```
a = 2
if a>3:
   print('oba')
else:
   print('ufa')
print('foi')
```

Agora a comparação resulta False (já que $2 > 3$ é falso) e com isso a impressão de 'oba' é saltada e depois a impressão de 'ufa' acontece. Novamente 'foi' é impresso independentemente da comparação inicial.

## 5.1 Exercício

Nos exercícios a seguir, você deve simular o interpretador Python e descobrir qual valor vai ser impresso ao final. Considere todas as variáveis como sendo do tipo **inteiro**. Todos os códigos estão sintaticamente corretos. A sugestão , que **depois** de ter calculado o valor na ponta do lápis, você confira o resultado com um computador real.

**Exercício 1**

```
def AA():
   A=4
   B=5
   C=8
   D=6
   F=6
   G=6
   if F!=2:
      C=A+F
      if (D>=9)or(C!=4):
  F=D+B
      C=C-C
   else:
      D=D-B
      if (D==5)and(D<8):
  D=D-B
      else:
  if F<2:
   F=A+B
  else:
   F=C+D
  A=G-G
      B=A*C
   A=C+D
   print(G+A+B-D)
AA()
```

**Exercício 2**

```
def AA():
   A=9
   B=5
   C=9
   D=2
   F=3
   G=8
   if B>5:
      if (G>9)or(D<=5):
  C=C+D
      if D==6:
  C=G-G
```

```
      C=G*A
   else:
      G=G*C
      if (F<2)and(not(C<4)):
  A=G*F
  if C<=6:
   B=F*C
      else:
  if (C>5)or(not(G==3)):
   D=D+A
  else:
   A=F-B
  G=C-B
      B=G+D
   print(A+F+G-D)
AA()
```

**Respostas**

```
     1.      2.      3.
     11       5      -5
```

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 6

# Repetições

As repetições são estruturas da linguagem que asseguram a execução repetida de trechos de comandos, até que uma determinada condição for satisfeita. Note que este conceito faz parte do nosso dia a dia.

Por exemplo, uma caixa dágua posta a encher o fará até que atinja a capacidade total. Um forno assando um bolo deverá operar até que o bolo esteja assado, uma esteira carregadeira de um navio opera até que o depósito do navio esteja cheio ou enquanto o silo abastacedor tiver conteúdo, parando na condição que primeiro for atingida, um pneu de carro receberá ar comprimido até que uma certa pressão seja atingida e a água do café vai esquentar até ferver ou um pouco antes. A operação de esvaziar um saco de bergamotas irá até que não haja mais bergamotas nele.

O que não falta na nossa vida são operações repetitivas que ocorrem até que uma condição seja atendida, ou o que praticamente é a mesma coisa, enquanto certa condição perdurar.

## 6.1 while

Os comandos básicos em Python são `while` que pode ser traduzido por enquanto. Seu formato é

```
while <condição>:
   comando_1
   comando_2
   ...
   comando_i
comando_n
```

Quando ele for encontrado será assim interpretado: primeiro a condição associada ao while será avaliada. Se ela for falsa, ocorre um desvio desprezando todo o bloco indentado abaixo. No exemplo acima, se a condição for falsa, o próximo comando a ser executado é o $comando_n$. Agora, se a condição é verdadeira, o bloco indentado é executado. Quando ele acabar, há um retorno (daí a repetição) ao início do bloco e a reavliação da condição. Enquanto ela for verdadeira, o bloco fica em loop.

Logo, aqui vale uma advertência: quando usar um *while* garanta que em algum momento do bloco, a condição seja tornada falsa, sob pena do seu programa nunca mais sair daí.

Por exemplo, seja somar os 33 primeiros números ímpares:

```
i=1
q=0
p=1
while i<34:
   q=q+p
   p=p+2
   i=i+1
print(q)
```

O programa acima vai imprimir 1089, que é a soma procurada.

## 6.2 break

Um comando que permite modificar o funcionamento do while é o break. Normalmente ele é colocado dentro de uma condição, embora isto não seja obrigatório. Quando break é interpretado ele faz com que o ciclo do while, na verdade qualquer ciclo, seja interrompido, forçando uma saída do bloco indentado.

Exemplo, seja um programa para calcular o triplo de um número digitado. O programa deve operar até ser digitado um número negativo, que significará fim de processamento.

```
a=1
while 1==1:
  if a<0:
    break
  a=int(input("informe o valor "))
  print(3*a)
print('adeus')
```

Note que como vai-se usar o *break* para a saída do laço, escreve-se uma condição que sempre é verdadeira (conhecida na lógica como uma tautologia) , que neste caso é $1 == 1$, que, por óbvio, é sempre verdadeira.

Eis um trecho da execução desse programa:

```
========== RESTART: C:/Python3/teste.py ===========
informe o valor 2
6
informe o valor 33
99
informe o valor 8
24
informe o valor -1
-3
adeus
>>>
```

### 6.2.1 Repetição aninhada

Quando se cria um bloco de repetição, dentro do bloco, o Python admite qualquer comando, inclusive um outro comando de repetição. Então surgem os blocos aninhados que são muito importantes em programação. Acompanhe o exemplo

```
i=1
while i<=3:
   j=10
   while j<=30:
      j=j+10
      print (i,j)
   i=i+1
print('acabou')
```

que vai gerar a seguinte saída

```
(1, 20)
(1, 30)
(1, 40)
(2, 20)
(2, 30)
(2, 40)
(3, 20)
(3, 30)
(3, 40)
acabou
```

## 6.3 Continue

Este comando também serve para interromper um ciclo de processamento, mas diferentemente de `break` que encerra inapelavelmente o laço, este comando `continue` encerra o processamento d euma interação e avança para a próxima interação. Acompanhe a diferença entre os dois comandos

```
i=3
while i<10:
   print(i,' ')
   if i%7==0:
      break
   i=i+1
print('acabou')
```

Esta execução teve o seguinte resultado:

```
3
4
5
6
7
acabou
```

Agora acompanhe o seguinte exemplo usando continue

```
i=3
while i<10:
   print(i,' ')
   if i%7==0:
      continue
   i=i+1
print('acabou')
```

Neste caso, não ponha para rodar, pois o programa vai entrar em laço infinito. Veja porque: O processamento começa com i=3, 4, 5 r 6. Quando o valor 7 for atingido, o continue vai comandar um retoino à próxima interação, mas sem alterar o valor de $i$ (já que esta alteração está depois do `continue`. Aí ela vai imprimir 7,7,7,7,.... e não vai parar nunca mais.

## 6.4 For

O For é o grande interador do Python. Ele é uma expansão do comando `for` do C++. Lá no C++ o for funciona como se fosse uma simplificação do while, mas aqui ele é mais do que isso. A mudança se deve ao conceito de interador. Numa rápida explicação um interador é uma generalização do conceito de índice. Ele é uma generalização já que o índexador só se aplica a conjuntos homogêneos indexados (conhecidos como arrays) e o interador se aplica a qualquer coleção de objetos Python. Pode ser um array, mas pode ser também registros em um arquivo, itens em um conjunto, etc etc.

Veja um exemplo radical disso

```
s="Curitiba - Paraná - Brasil"
qtd=0
for c in s:
  if c=="a":
    qtd=qtd+1
print("achei ",qtd," a")
```

Ao executar o código acima, ele vai responder `achei 4 a"`. Note que são 4 letras 'a', sendo que o 'a' acentuado de Paraná, não conta, já que é outro caracter.

## 6.5 Exercícios

Nos exercícios a seguir, você deve simular o interpretador Python e descobrir qual valor vai ser impresso ao final. Todos os códigos estao sintaticamente corretos. A sugestão é que **depois** de ter calculado o valor na ponta do lápis, você confira o resultado com um computador real.

### Exemplos

Seja o programa

```
def AA():
   A=5
   B=5
   C=3
   if C>=18:
      while B<=18:
  C=C-3
  B=B+4
   else:
      C=C+4
      B=B+2
   print(C+C+B)
AA()
```

 ©75-18, Pedro Kantek

Cujo resultado é 21 e seja o seguinte código

```
def AA():
    A=4
    B=3
    C=6
    D=1
    C=C+6+3
    while C>6:
        B=D+7
        while A<=14:
  D=B+4
  A=A+2
        D=B+19
        C=C-1
    print(C+B+B)
AA()
```

cujo resultado é 438. Seja agora o programa

```
def AA():
    A=7
    B=3
    C=5
    D=6
    A=A+5+3
    while A>=4:
        B=D-4
        if A>=10:
  while C<=13:
    C=C+6
  B=D+3
        else:
  D=D-13
        if D>4:
  B=B+5
        else:
  B=D-5
        A=A-2
    print(B+B)
AA()
```

cujo resultado é -76.

**Exercício 1**

```
def AA():
    A=7
    B=6
    C=7
    while C<16:
        A=B+5
        B=A+5
        C=C+2
    print(A+B+C)
AA()
```

Informe no quadro próprio o valor que foi impresso.

**Exercício 2**

```
def AA():
    A=6
    B=2
    C=3
```

```
   if C<=20:
      while B<=20:
  C=A+5
  B=B+4
   else:
      A=C-8
      B=B+2
   print(C+A+B)
AA()
```

**Exercício 3**

```
def AA():
   A=8
   B=2
   C=2
   if B!=16:
      while C<16:
  B=B+8
  C=C+2
   else:
      while C<13:
  A=B+7
  C=C+2
   print(B+B+C)
AA()
```

**Respostas**

```
    1   124    39
```

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 7

# Listas

Uma lista em Python é uma coleção de coisas. Em outras linguagens, essas coisas precisam ser de mesmo tipo, mas em Python, não. Podem ser coisas bem heterogêneas.

Cria-se uma lista em python usando-se os delimitadores colchetes. Uma lista é criada assim:

```
>>> a=[]
```

Criou-se aqui uma lista de nome `a`, inicialmente vazia. Para incluir coisas na lista, usa-se o método `append`, veja como

```
>>> a=[]
>>> a.append(1)
>>> a
[1]
>>> a.append('oi')
>>> a
[1, 'oi']
```

Outro jeito de criar uma lista é usando a função `list` como em

```
>>> b=list(range(6))
>>> b
[0, 1, 2, 3, 4, 5]
```

Note que o primeiro elemento da lista pode ser acessado para leitura fazendo-se

```
>>> a[0]
1
```

E podem ser alterados, como em

```
>>> a[0]='bacana'
>>> a
['bacana', 'oi']
```

Veja mais alguns exemplos, e estude-os...

```
>>> a = ['spam', 'eggs', 100, 1234]
>>> a
['spam', 'eggs', 100, 1234]
```

Os índices para as listas começam em 0 e crescem para a direita quando de usam números inteiros positivos. A função `len(lista)` devolve o tamanho da lista. Índices negativos vem da direita para a esquerda. `lista[-1]` devolve o último elemento da lista, `lista[-2]` o penúltimo e assim por diante. Veja isso tudo:

```
>>> x=[10,20,30,'oi','viva',4.5,99]
>>> x
[10, 20, 30, 'oi', 'viva', 4.5, 99]
>>> x[0]
10
>>> x[1]
20
>>> len(x)
7
>>> x[-1]
99
>>> x[-2]
4.5
```

## 7.1 Fatiamento

É uma operação fundamental em Python, pode ser usada em listas, tuplas, strings... É muito usada em MatLab, mas sinceramente eu não consigo dizer quem é o ovo e quem é a galinha, isto quem veio antes. Tanto faz. Uma fatia é uma especificação envolvendo um ou dois "dois pontos" e ela extrai um pedaço de uma lista, tupla ou string. A especificação é

```
[começo da fatia:final da fatia:incremento]
```

**começo** o começo da fatia é o índice do seu início, sempre relativo a zero. Se nada for escrito aqui o valor *default* é 0.

**final** o final da fatia é o próximo número ALÉM do final. Ou seja este número é compatível com o início da numeração em zero. O valor *default* é o tamanho da lista ou `len(lista)`.

**incremento** É um valor muitas vezes omitido (e neste caso o valor *default* é 1), mas quando presente ele indica quanto somar ao valor atual para obter o próximo valor.

Acompanhe alguns exemplos

```
>>> y=[11,21,31,41,51]
>>> y
[11, 21, 31, 41, 51]
>>> y[0:3]
[11, 21, 31]
>>> y[:3]
[11, 21, 31]
>>> y[2:]
[31, 41, 51]
>>> y[1:3:2]
[21]
>>> y[1:-1]
[21, 31, 41]
>>> y[::2]
[11, 31, 51]
>>> y[::-1]
[51, 41, 31, 21, 11]
>>> y[::-2]
[51, 31, 11]
>>> y[:3]
[11, 21, 31]
>>> y[3:]
[41, 51]
```

Da mesma forma que índices de string, índices de lista começam em 0, listas também podem ser concatenadas, fatiadas e multiplicadas:

```
>>> a = ['spam', 'eggs', 100, 1234]
>>> a[0]
'spam'
>>> a[3]
1234
>>> a[-2]
100
>>> a[1:-1]
['eggs', 100]
>>> a[:2] + ['bacon', 2*2]
['spam', 'eggs', 'bacon', 4]
>>> 3*a[:3] + ['Boo!']
['spam', 'eggs', 100, 'spam', 'eggs', 100, 'spam', 'eggs', 100, 'Boo!']
```

Todas as operações de fatiamento devolvem uma nova lista contendo os elementos solicitados. Isto significa que o fatiamento a seguir retorna uma cópia rasa (shallow copy) da lista:

```
>>> a[:]
['spam', 'eggs', 100, 1234]
```

Diferentemente de strings, que são imutáveis, é possível alterar elementos individuais de uma lista:

```
>>>
>>> a
['spam', 'eggs', 100, 1234]
>>> a[2] = a[2] + 23
>>> a
['spam', 'eggs', 123, 1234]
```

Atribuição à fatias também é possível, e isso pode até alterar o tamanho da lista ou remover todos os itens dela:

```
\index{substituir} \index{remover} \index{inserir} \index{limpar}
>>>
>>> # Substituir alguns itens:
... a[0:2] = [1, 12]
>>> a
[1, 12, 123, 1234]
>>> # Remover alguns:
... a[0:2] = []
>>> a
[123, 1234]
>>> # Inserir alguns:
... a[1:1] = ['bletch', 'xyzzy']
>>> a
[123, 'bletch', 'xyzzy', 1234]
>>> # Inserir uma cópia da própria lista no início
>>> a[:0] = a
>>> a
[123, 'bletch', 'xyzzy', 1234, 123, 'bletch', 'xyzzy', 1234]
>>> # Limpar a lista: substituir todos os items por uma lista vazia
>>> a[:] = []
>>> a
[]
```

A função embutida len() também se aplica a listas:

```
>>>
>>> a = ['a', 'b', 'c', 'd']
>>> len(a)
4
```

É possível aninhar listas (criar listas contendo outras listas), por exemplo:

```
>>>
>>> q = [2, 3]
>>> p = [1, q, 4]
>>> len(p)
3
>>> p[1]
[2, 3]
>>> p[1][0]
2
>>> p[1].append('xtra')     # Veja a seção 5.1
>>> p
[1, [2, 3, 'xtra'], 4]
>>> q
[2, 3, 'xtra']
```

Observe que no último exemplo, p[1] e q na verdade se referem ao mesmo objeto! Mais tarde retornaremos a semântica dos objetos.

### 7.1.1 fatiamento em arrays

Acompanhe

```
>>> from numpy import *
>>> a=array([[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9],[10,11,12]])
>>> a
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
array([[ 1,  2,  3],
       [ 4,  5,  6],
       [ 7,  8,  9],
       [10, 11, 12]])
>>> a[1,1]
5
>>> a[1:3,1]
array([5, 8])
>>> a[1:3,1:3]
array([[5, 6],
       [8, 9]])
>>> a[1:3,1:3]=777
>>> a
array([[  1,   2,   3],
       [  4, 777, 777],
       [  7, 777, 777],
       [ 10,  11,  12]])
```

## 7.2 Mais

Este texto descreve alguns pontos já abordados, porém com mais detalhes, e adiciona outros pontos e foi retirado de http://turing.com.br/pydoc/2.7/tutorial/datastructures.html

## 7.3 Mais sobre listas

O tipo list possui mais métodos. Aqui estão todos os métodos disponíveis em um objeto lista:

`list.append(x)`

Adiciona um item ao fim da lista; equivale a `a[len(a):] = [x].`

`list.extend(L)`

Prolonga a lista, adicionando no fim todos os elementos da lista L passada como argumento; equivalente `a a[len(a):] = L.`

`list.insert(i, x)`

Insere um item em uma posição especificada. O primeiro argumento é o índice do elemento antes do qual será feita a inserção, assim a.insert(0, x) insere no início da lista, e a.insert(len(a), x) equivale a a.append(x).

`list.remove(x)`

Remove o primeiro item encontrado na lista cujo valor é igual a x. Se não existir valor igual, uma exceção ValueError é levantada.

`list.pop([i])`

Remove o item na posição dada e o devolve. Se nenhum índice for especificado, a.pop() remove e devolve o último item na lista. (Os colchetes ao redor do i indicam que o parâmetro é opcional, não que você deva digitá-los daquela maneira. Você verá essa notação com frequência na Referência da Biblioteca Python.)

`list.index(x)`

Devolve o índice do primeiro item cujo valor é igual a x, gerando ValueError se este valor não existe

`list.count(x)`

Devolve o número de vezes que o valor x aparece na lista.

`list.sort()`

Ordena os itens na própria lista in place.

`list.reverse()`

Inverte a ordem dos elementos na lista in place (sem gerar uma nova lista).

Um exemplo que utiliza a maioria dos métodos:

```
>>> a = [66.25, 333, 333, 1, 1234.5]
>>> print a.count(333), a.count(66.25), a.count('x')
2 1 0
>>> a.insert(2, -1)
>>> a.append(333)
>>> a
[66.25, 333, -1, 333, 1, 1234.5, 333]
>>> a.index(333)
1
>>> a.remove(333)
>>> a
[66.25, -1, 333, 1, 1234.5, 333]
>>> a.reverse()
>>> a
[333, 1234.5, 1, 333, -1, 66.25]
>>> a.sort()
>>> a
[-1, 1, 66.25, 333, 333, 1234.5]
```

(N.d.T. Note que os métodos que alteram a lista, inclusive sort e reverse, devolvem None para lembrar o programador de que modificam a própria lista, e não criam uma nova. O único método que altera a lista e devolve um valor é o pop)

### 7.3.1 Usando listas como pilhas

Os métodos de lista tornam muito fácil utilizar listas como pilhas, onde o item adicionado por último é o primeiro a ser recuperado (política "último a entrar, primeiro a sair"). Para adicionar um item ao topo da pilha, use append(). Para recuperar um item do topo da pilha use pop() sem nenhum índice. Por exemplo:

```
>>> pilha = [3, 4, 5]
>>> pilha.append(6)
>>> pilha.append(7)
>>> pilha
[3, 4, 5, 6, 7]
>>> pilha.pop()
7
>>> pilha
[3, 4, 5, 6]
>>> pilha.pop()
6
>>> pilha.pop()
5
>>> pilha
[3, 4]
```

### 7.3.2 Usando listas como filas

Você também pode usar uma lista como uma fila, onde o primeiro item adicionado é o primeiro a ser recuperado (política "primeiro a entrar, primeiro a sair"); porém, listas não são eficientes para esta finalidade. Embora appends e pops no final da lista sejam rápidos, fazer inserts ou pops no início da lista é lento (porque todos os demais elementos têm que ser deslocados).

Para implementar uma fila, use a classe collections.deque que foi projetada para permitir appends e pops eficientes nas duas extremidades. Por exemplo:

```
>>> from collections import deque
>>> fila = deque(["Eric", "John", "Michael"])
>>> fila.append("Terry")    # Terry chega
>>> fila.append("Graham")   # Graham chega
>>> fila.popleft() # O primeiro a chegar parte
'Eric'
>>> fila.popleft() # O segundo a chegar parte
'John'
>>> fila  # O resto da fila, em ordem de chegada
deque(['Michael', 'Terry', 'Graham'])
(N.d.T. neste exemplo são usados nomes de membros do grupo Monty Python)
```

## 7.4 Ferramentas de programação funcional

Existem três funções embutidas que são muito úteis para processar listas: filter(), map(), e reduce().

filter(função, sequência) devolve uma nova sequência formada pelos itens do segundo argumento para os quais funcao(item) é verdadeiro. Se a sequencia de entrada for string ou tupla, a saída será do mesmo tipo; caso contrário, o resultado será sempre uma lista. Por exemplo, para computar uma sequência de números não divisíveis por 2 ou 3:

```
>>> def f(x): return x % 2 != 0 and x % 3 != 0
...
>>> filter(f, range(2, 25))
[5, 7, 11, 13, 17, 19, 23]
map(funcao, sequencia) aplica funcao(item) a cada item da sequência e devolve uma lista formac

>>> def cubo(x): return x*x*x
...
>>> map(cubo, range(1, 11))
[1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000]
```

Mais de uma sequência pode ser passada; a função a ser aplicada deve aceitar tantos argumentos quantas sequências forem passadas, e é invocada com o item correspondente de cada sequência (ou None, se alguma sequência for menor que outra). Por exemplo:

```
>>> seq = range(8)
>>> def somar(x, y): return x+y
...
>>> map(somar, seq, seq)
[0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14]
```

Se None for passado no lugar da função, então será aplicada a função identidade (apenas devolve o argumento recebido). Se várias sequências forem passadas, a lista resultante terá tuplas formadas pelos elementos correspondentes de cada sequência. Isso se parece com a função zip(), exceto que map() devolve uma lista com o comprimento da sequência mais longa que foi passada, preenchendo as lacunas com None quando necessário, e zip() devolve uma lista com o comprimento da mais curta. Confira:

```
>>> map(None, range(5))
[0, 1, 2, 3, 4]
>>> map(None, range(5), range(3))
[(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, None), (4, None)]
>>> zip(range(5), range(3))
[(0, 0), (1, 1), (2, 2)]
```

A função reduce(função, sequencia) devolve um único valor construído a partir da sucessiva aplicação da função binária (N.d.T. que recebe dois argumentos) a todos os elementos da lista fornecida, começando pelos dois primeiros itens, depois aplicando a função ao primeiro resultado obtido e ao próximo item, e assim por diante. Por exemplo, para computar a soma dos inteiros de 1 a 10:

```
>>> def somar(x,y): return x+y
...
>>> reduce(somar, range(1, 11))
55
```

Se houver um único elemento na sequência fornecida, seu valor será devolvido. Se a sequência estiver vazia, uma exceção será levantada.

Um terceiro argumento pode ser passado para definir o valor inicial. Neste caso, redução de uma sequência vazia devolve o valor inicial. Do contrário, a redução se inicia aplicando a função ao valor inicial e ao primeiro elemento da sequência, e continuando a partir daí.

```
>>> def somatoria(seq):
...     def somar(x,y): return x+y
...     return reduce(somar, seq, 0)
...
>>> somatoria(range(1, 11))
55
>>> somatoria([])
0
```

Não use a função somatória deste exemplo; somar sequências de números é uma necessidade comum, e para isso Python tem a função embutida sum(), que faz exatamente isto, e também aceita um valor inicial (opcional).

## 7.5 List comprehensions ou abrangências de listas

Uma *list comprehension* é uma maneira concisa de construir uma lista preenchida. (N.d.T. literalmente, abrangência de lista mas no Brasil o termo em inglês é muito usado; também se usa a abreviação listcomp)

Um uso comum é construir uma nova lista onde cada elemento é o resultado de alguma expressão aplicada a cada membro de outra sequência ou iterável, ou para construir uma subsequência cujos elementos satisfazem uma certa condição.

Por exemplo, suponha que queremos criar uma lista de quadrados, assim:

```
>>> quadrados = []
>>> for x in range(10):
...     quadrados.append(x**2)
...
>>> quadrados
[0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81]
Podemos obter o mesmo resultado desta forma:

quadrados = [x**2 for x in range(10)]
```

Isso equivale a quadrados = map(lambda x: x**2, range(10)), mas é mais conciso e legível.

Uma abrangência de lista é formada por um par de colchetes contendo uma expressão seguida de uma cláusula for, e então zero ou mais cláusulas for ou if. O resultado será uma lista resultante da avaliação da expressão no contexto das cláusulas for e if.

Por exemplo, esta listcomp combina os elementos de duas listas quando eles são diferentes:

```
>>> [(x, y) for x in [1,2,3] for y in [3,1,4] if x != y]
[(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)]
Isto equivale a:

>>> combs = []
>>> for x in [1,2,3]:
...     for y in [3,1,4]:
...  if x != y:
...    combs.append((x, y))
...
>>> combs
[(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)]
```

Note como a ordem dos for e if é a mesma nos dois exemplos acima.

Se a expressão é uma tupla, ela deve ser inserida entre parênteses (ex., (x, y) no exemplo anterior).

```
>>> vec = [-4, -2, 0, 2, 4]
>>> # criar uma lista com os valores dobrados
>>> [x*2 for x in vec]
[-8, -4, 0, 4, 8]
>>> # filtrar a lista para excluir números negativos
>>> [x for x in vec if x >= 0]
[0, 2, 4]
>>> # aplicar uma função a todos os elementos
>>> [abs(x) for x in vec]
[4, 2, 0, 2, 4]
>>> # invocar um método em cada elemento
>>> frutas = ['  banana', '  loganberry ', 'passion fruit  ']
>>> [arma.strip() for arma in frutas]
['banana', 'loganberry', 'passion fruit']
>>> # criar uma lista de duplas, ou tuplas de 2, como (numero, quadrado)
>>> [(x, x**2) for x in range(6)]
[(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)]
>>> # a tupla deve estar entre parênteses, do contrário ocorre um erro
>>> [x, x**2 for x in range(6)]
  File "<stdin>", line 1
    [x, x**2 for x in range(6)]
       ^
SyntaxError: invalid syntax
>>> # achatar uma lista usando uma listcomp com dois 'for'
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
>>> vec = [[1,2,3], [4,5,6], [7,8,9]]
>>> [num for elem in vec for num in elem]
[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

A abrangência de lista é mais flexível do que map() e pode conter expressões complexas e funções aninhadas, sem necessidade do uso de lambda:

```
>>> from math import pi
>>> [str(round(pi, i)) for i in range(1, 6)]
['3.1', '3.14', '3.142', '3.1416', '3.14159']
```

### 7.5.1 Listcomps aninhadas

A expressão inicial de uma listcomp pode ser uma expressão arbitrária, inclusive outra listcomp.

Observe este exemplo de uma matriz 3x4 implementada como uma lista de 3 listas de comprimento 4:

```
>>> matriz = [
...     [1, 2, 3, 4],
...     [5, 6, 7, 8],
...     [9, 10, 11, 12],
... ]
A abrangência de listas abaixo transpõe as linhas e colunas:

>>> [[linha[i] for linha in matriz] for i in range(len(matriz[0]))]
[[1, 5, 9], [2, 6, 10], [3, 7, 11], [4, 8, 12]]
```

Como vimos na seção anterior, a listcomp aninhada é computada no contexto da cláusula for seguinte, portanto o exemplo acima equivale a:

```
>>> transposta = []
>>> for i in range(len(matriz[0])):
...     transposta.append([linha[i] for linha in matriz])
...
>>> transposta
[[1, 5, 9], [2, 6, 10], [3, 7, 11], [4, 8, 12]]
e isso, por sua vez, faz o mesmo que isto:

>>> transposta = []
>>> for i in range(len(matriz[0])):
...     # as próximas 3 linhas implementam a listcomp aninhada
...     linha_transposta = []
...     for linha in matriz:
...  linha_transposta.append(linha[i])
...     transposta.append(linha_transposta)
...
>>> transposta
[[1, 5, 9], [2, 6, 10], [3, 7, 11], [4, 8, 12]]
```

Na prática, você deve dar preferência a funções embutidas em vez de expressões complexas. A função zip() resolve muito bem este caso de uso:

## 7.6 O comando del

Existe uma maneira de remover um item de uma lista conhecendo seu índice, ao invés de seu valor: o comando del. Ele difere do método list.pop(), que devolve o item removido. O comando del também pode ser utilizado para remover fatias (slices) da lista, ou mesmo limpar a lista toda (que fizemos antes atribuindo uma lista vazia à fatia a[:]). Por exemplo:

```
>>> a = [-1, 1, 66.25, 333, 333, 1234.5]
>>> del a[0]
>>> a
[1, 66.25, 333, 333, 1234.5]
>>> del a[2:4]
>>> a
[1, 66.25, 1234.5]
>>> del a[:]
```

```
>>> a
[]
```

del também pode ser usado para remover totalmente uma variável:

```
>>> del a
>>> a
Traceback (most recent call last):
  ...
NameError: name 'a' is not defined
```

Referenciar a variável a depois de sua remoção constitui erro (pelo menos até que seja feita uma nova atribuição para ela). Encontraremos outros usos para o comando del mais tarde.

## 7.7 Tuplas e sequências

Vimos que listas e strings têm muitas propriedades em comum, como indexação e operações de fatiamento (slicing). Elas são dois exemplos de sequências (veja Sequence Types — str, unicode, list, tuple, bytearray, buffer, xrange). Como Python é uma linguagem em evolução, outros tipos de sequências podem ser adicionados. Existe ainda um outro tipo de sequência padrão na linguagem: a tupla (tuple).

Uma tupla consiste em uma sequência de valores separados por vírgulas:

```
>>> t = 12345, 54321, 'bom dia!'
>>> t[0]
12345
>>> t
(12345, 54321, 'bom dia!')
>>> # Tuplas podem ser aninhadas:
... u = t, (1, 2, 3, 4, 5)
>>> u
((12345, 54321, 'bom dia!'), (1, 2, 3, 4, 5))
```

Como você pode ver no trecho acima, na saída do console as tuplas são sempre envolvidas por parênteses, assim tuplas aninhadas podem ser lidas corretamente. Na criação, tuplas podem ser envolvidas ou não por parênteses, desde que o contexto não exija os parênteses (como no caso da tupla dentro a uma expressão maior).

Tuplas podem ser usadas de diversas formas: pares ordenados (x, y), registros de funcionário extraídos uma base de dados, etc. Tuplas, assim como strings, são imutáveis: não é possível atribuir valores a itens individuais de uma tupla (você pode simular o mesmo efeito através de operações de fatiamento e concatenação; N.d.T. mas neste caso nunca estará modificando tuplas, apenas criando novas). Também é possível criar tuplas contendo objetos mutáveis, como listas.

Um problema especial é a criação de tuplas contendo 0 ou 1 itens: a sintaxe usa certos truques para acomodar estes casos. Tuplas vazias são construídas por uma par de parênteses vazios; uma tupla unitária é construída por um único valor e uma vírgula entre parênteses (não basta colocar um único valor entre parênteses). Feio, mas funciona:

```
>>> vazia = ()
>>> upla = 'hello',    # <-- note a vírgula no final
>>> len(vazia)
0
>>> len(upla)
1
>>> upla
('hello',)
```

O comando t = 12345, 54321, 'hello!' é um exemplo de empacotamento de tupla (tuple packing): os valores 12345, 54321 e 'bom dia!' são empacotados juntos em uma tupla. A operação inversa também é possível:

```
>>> x, y, z = t
```

Isto é chamado de desempacotamento de sequência (sequence unpacking), funciona para qualquer tipo de sequência do lado direito. Para funcionar, é necessário que a lista de variáveis do lado esquerdo tenha o mesmo comprimento da sequência à direita. Sendo assim, a atribuição múltipla é um caso de empacotamento de tupla e desempacotamento de sequência:

## 7.8 Sets (conjuntos)

Python também inclui um tipo de dados para conjuntos, chamado set. Um conjunto é uma coleção desordenada de elementos, sem elementos repetidos. Usos comuns para sets incluem a verificação eficiente da existência de objetos e a eliminação de itens duplicados. Conjuntos também suportam operações matemáticas como união, interseção, diferença e diferença simétrica.

Uma pequena demonstração:

```
>>> cesta = ['uva', 'laranja', 'uva', 'abacaxi', 'laranja', 'banana']
>>> frutas = set(cesta)   # criar um conjunto sem duplicatas
>>> frutas
set(['abacaxi', 'uva', 'laranja', 'banana'])
>>> 'laranja' in frutas   # testar se um elemento existe é muito rápido
True
>>> 'capim' in frutas
False
>>>
>>> # Demonstrar operações de conjunto em letras únicas de duas palavras
...
>>> a = set('abracadabra')
>>> b = set('alacazam')
>>> a     # letras unicas em a
set(['a', 'r', 'b', 'c', 'd'])
>>> a - b   # letras em a mas não em b
set(['r', 'd', 'b'])
>>> a | b   # letras em a ou em b
set(['a', 'c', 'r', 'd', 'b', 'm', 'z', 'l'])
>>> a & b   # letras tanto em a como em b
set(['a', 'c'])
>>> a ^ b   # letras em a ou b mas não em ambos
set(['r', 'd', 'b', 'm', 'z', 'l'])
```

N.d.T. A sintaxe de sets do Python 3.1 foi portada para o Python 2.7, tornando possível escrever 10, 20, 30 para definir set([10, 20, 30]). O conjunto vazio tem que ser escrito como set() ou set([]), pois  sempre representou um dicionário vazio, como veremos a seguir. Também existe uma sintaxe para set comprehensions, que nos permite escrever x*10 for x in [1, 2, 3] para construir 10, 20, 30.

## 7.9 Dicionários

Outra estrutura de dados muito útil embutida em Python é o dicionário, cujo tipo é dict (ver Mapping Types — dict). Dicionários são também chamados de "memória associativa" ou "vetor associativo" em outras linguagens. Diferente de sequências que são indexadas por inteiros, dicionários são indexados por chaves (keys), que podem ser de qualquer tipo imutável (como strings e inteiros). Tuplas também podem ser chaves se contiverem apenas strings, inteiros ou outras tuplas. Se a tupla contiver, direta ou indiretamente, qualquer valor mutável, não poderá ser chave. Listas não podem ser usadas como chaves porque podem ser modificadas in place pela atribuição em índices ou fatias, e por métodos como append() e extend().

Um bom modelo mental é imaginar um dicionário como um conjunto não ordenado de pares chave-valor, onde as chaves são únicas em uma dada instância do dicionário. Dicionários são delimitados por chaves: , e contém uma lista de pares chave:valor separada por vírgulas. Dessa forma também será exibido o conteúdo de um dicionário no console do Python. O dicionário vazio é .

As principais operações em um dicionário são armazenar e recuperar valores a partir de chaves. Também é possível remover um par chave:valor com o comando del. Se você armazenar um valor utilizando uma chave já presente, o antigo valor será substituído pelo novo. Se tentar recuperar um valor usando uma chave inexistente, será gerado um erro.

O método keys() do dicionário devolve a lista de todas as chaves presentes no dicionário, em ordem arbitrária (se desejar ordená-las basta aplicar o a função sorted() à lista devolvida). Para verificar a existência de uma chave, use o operador in.

A seguir, um exemplo de uso do dicionário:

```
>>> d={}
>>> d
{}
>>> d[123]='oba' #a chave 123 corresponde a 'oba'
>>> d
```

```
{123: 'oba'}
>>> d[124]='fui' #a chave 124 a 'fui'
>>> d
{123: 'oba', 124: 'fui'}

>>> tel = {'jack': 4098, 'sape': 4139}
>>> tel['guido'] = 4127
>>> tel
{'sape': 4139, 'guido': 4127, 'jack': 4098}
>>> tel['jack']
4098
>>> del tel['sape']
>>> tel['irv'] = 4127
>>> tel
{'guido': 4127, 'irv': 4127, 'jack': 4098}
>>> tel.keys()
['guido', 'irv', 'jack']
>>> 'guido' in tel
True
```

O construtor dict() produz dicionários diretamente a partir de uma lista de chaves-valores, armazenadas como duplas (tuplas de 2 elementos). Quando os pares formam um padrão, uma list comprehensions pode especificar a lista de chaves-valores de forma mais compacta.

```
>>>
>>> dict([('sape', 4139), ('guido', 4127), ('jack', 4098)])
{'sape': 4139, 'jack': 4098, 'guido': 4127}
>>> dict([(x, x**2) for x in (2, 4, 6)])     # use uma list comprehension
{2: 4, 4: 16, 6: 36}
```

N.d.T. A partir do Python 2.7 também existem dict comprehensions (abrangências de dicionário). Com esta sintaxe o último dict acima pode ser construído assim x: x**2 for x in (2, 4, 6).

Mais adiante no tutorial aprenderemos sobre expressões geradoras, que são ainda mais adequados para fornecer os pares de chave-valor para o construtor dict().

Quando chaves são strings simples, é mais fácil especificar os pares usando argumentos nomeados no construtor:

```
>>> dict(sape=4139, guido=4127, jack=4098)
{'sape': 4139, 'jack': 4098, 'guido': 4127}
```

N.d.T. Naturalmente, por limitações da sintaxe, essa sugestão só vale se as chaves forem strings ASCII, sem acentos, conforme a regras para formação de identificadores do Python.

## 7.10 Técnicas de iteração

Ao percorrer um dicionário em um laço, a variável de iteração receberá uma chave de cada vez:

```
>>> knights = {'gallahad': 'the pure', 'robin': 'the brave'}
>>> for k in knights:
...     print k
...
gallahad
robin
```

Quando conveniente, a chave e o valor correspondente podem ser obtidos simultaneamente com o método iteritems().

```
>>> knights = {'gallahad': 'the pure', 'robin': 'the brave'}
>>> for k, v in knights.iteritems():
...     print k, v
...
gallahad the pure
robin the brave
```

Ao percorrer uma sequência qualquer, o índice da posição atual e o valor correspondente podem ser obtidos simultaneamente usando a função enumerate():

```
>>> for i, v in enumerate(['tic', 'tac', 'toe']):
...     print i, v
...
0 tic
1 tac
2 toe
```

Para percorrer duas ou mais sequências simultaneamente com o laço, os itens podem ser agrupados com a função zip().

```
>>> questions = ['name', 'quest', 'favorite color']
>>> answers = ['lancelot', 'the holy grail', 'blue']
>>> for q, a in zip(questions, answers):
...     print 'What is your {0}?  It is {1}.'.format(q, a)
...
```

What is your name? It is lancelot. What is your quest? It is the holy grail. What is your favorite color? It is blue. N.d.T. O exemplo acima reproduz um diálogo do filme Monty Python - Em Busca do Cálice Sagrado. Este trecho não pode ser traduzido, exceto por um decreto real.

Para percorrer uma sequência em ordem inversa, chame a função reversed() com a sequência na ordem original.

```
>>> for i in reversed(xrange(1,10,2)):
...     print i
...
9
7
5
3
1
```

Para percorrer uma sequência de maneira ordenada, use a função sorted(), que retorna uma lista ordenada com os itens, mantendo a sequência original inalterada.

```
>>> cesta = ['uva', 'laranja', 'uva', 'abacaxi', 'laranja', 'banana']
>>> for fruta in sorted(cesta):
...     print fruta
...
abacaxi
banana
laranja
laranja
uva
uva
>>> for fruta in sorted(set(cesta)):  # sem duplicações
...     print fruta
...
abacaxi
banana
laranja
uva
```

### 7.10.1 Métodos de dicionários

**.clear()**

Remove todos os itens do dicionário

```
>>> d={'chave':1, 'chave2': 2}
>>> d
{'chave': 1, 'chave2': 2}
>>> d.clear()
>>> d
{}
```

**.get()**

Retorna o valor associado à chave no dicionário. Se a chave não existe retorna `valor`. Se `valor` não é usado o padrão é `None`.

```
>>> d={'arroz':20, 'feijão':30}
>>> d.get('ovo')
>>> print(d.get('ovo'))
None
>>> print(d.get('ovo',33))
33
```

**.keys()**

Retorna uma lista com todas as chaves do dicionário.

## 7.11 Mais sobre condições

As condições de controle usadas em while e if podem conter quaisquer operadores, não apenas comparações.

Os operadores de comparação in e not in verificam se um valor ocorre (ou não ocorre) em uma dada sequência. Os operadores is e is not comparam se dois objetos são na verdade o mesmo objeto; isto só é relevante no contexto de objetos mutáveis, como listas. Todos os operadores de comparação possuem a mesma precedência, que é menor do que a prioridade de todos os operadores numéricos.

Comparações podem ser encadeadas: Por exemplo a < b == c testa se a é menor que b e também se b é igual a c.

Comparações podem ser combinadas através de operadores booleanos and e or, e o resultado de uma comparação (ou de qualquer outra expressão), pode ter seu valor booleano negado através de not. Estes possuem menor prioridade que os demais operadores de comparação. Entre eles, not é o de maior prioridade e or o de menor. Dessa forma, a condição A and not B or C é equivalente a (A and (not B)) or C. Naturalmente, parênteses podem ser usados para expressar o agrupamento desejado.

Os operadores booleanos and e or são operadores short-circuit: seus argumentos são avaliados da esquerda para a direita, e a avaliação para quando o resultado é determinado. Por exemplo, se A e C são expressões verdadeiras, mas B é falsa, então A and B and C não chega a avaliar a expressão C. Em geral, quando usado sobre valores genéricos e não como booleanos, o valor do resultado de um operador atalho é o último valor avaliado na expressão.

É possível atribuir o resultado de uma comparação ou outra expressão booleana para uma variável. Por exemplo:

```
>>> string1, string2, string3 = '', 'Trondheim', 'Hammer Dance'
>>> non_null = string1 or string2 or string3
>>> non_null
'Trondheim'
```

Observe que em Python, diferente de C, atribuição não pode ocorrer dentro de uma expressão. Programadores C podem resmungar, mas isso evita toda uma classe de problemas frequentemente encontrados em programas C: digitar = numa expressão quando a intenção era ==.

## 7.12 Brincando com listas

Criando uma lista de números em sequência:

```
# python 2:
lista = range(100)

# python 3:
lista = list(range(100))
```

Criando uma lista com list comprehensions:

```
>>> lista = [x*2 for x in range(100)]
```

Percorrendo uma lista com for in:

```
>>> for x in lista:
    # faça algo com x
```

Percorrendo uma lista, obtendo os valores e seus índices:

```
>>> for indice, valor in enumerate(lista):
    print "lista[%d] = %d" % (indice, valor)
```

Percorrendo um pedaço de uma lista usando slicing:

```
>>> for x in lista[40:60]:
    # faça algo com x
```

 ©75-18, Pedro Kantek

Percorrendo uma lista de trás pra frente definindo o passo do slicing como -1:

```
>>> for x in lista[::-1]:
    # faça algo com x
Ou:
for x in reversed(lista):
    # faça algo com x
```

Percorrendo uma lista ordenada:

```
>>> for x in sorted(lista):
    # faça algo com x
```

Acessando o último elemento de uma lista com o índice -1:

```
>>> print lista[-1]
```

Copiando uma referência para uma lista:

```
>>> nova_ref = lista
>>> nova_ref is lista
True
```

Copiando de verdade uma lista:

```
>>> nova_lista = lista[:]
>>> nova_lista is lista
False
Ou, usando o módulo copy:
>>> import copy
>>> nova_lista = copy.copy(lista)
>>> nova_lista is lista
False
```

Ou caso lista contivesse listas aninhadas e quiséssemos fazer com que estas também fossem completamente copiadas, e não somente referenciadas, usaríamos a função deepcopy():

```
>>> nova_lista = copy.deepcopy(lista)
>>> nova_lista is lista
False
```

Embaralhando os elementos de uma lista (in-place):

```
>>> import random
>>> random.shuffle(lista)  # altera a própria lista
```

Obtendo uma amostra aleatória (de 10 elementos) de uma lista:

```
>>> print random.sample(lista, 10)
[729, 9025, 2401, 8100, 5776, 784, 1444, 484, 6241, 7396]
```

Obtendo um elemento aleatório de uma lista:

```
>>> random.choice(lista)
7744
```

Gerando uma lista com 10 números aleatórios, com valores entre 0 e 99:

```
>>> lista_aleatoria = random.sample(range(0, 100), 10)
```

Obtendo o maior elemento de uma lista:

```
>>> lista = range(0, 10)
>>> print max(lista)
9
O menor:
>>> print min(lista)
0
```

Pegando somente os elementos de índice par:

```
>>> print lista[::2]
[0, 2, 4, 6, 8]
Os de índice ímpar:
>>> print lista[1::2]
[1, 3, 5, 7, 9]
```

Somando todos os elementos de uma lista:

```
>>> print sum([1, 2, 3, 4])
10
```

Juntando duas listas, formando pares de elementos:

```
>>> lista = zip(range(0, 5), range(5, 10))
>>> print lista
[(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)]
```

Separando os elementos de uma lista de forma intercalada:

```
>>> lista = range(0, 10)
>>> intercaladas = lista[::2], lista[1::2]
>>> print intercaladas
([0, 2, 4, 6, 8], [1, 3, 5, 7, 9])
```

Transformando uma lista de strings em uma string CSV:

```
>>> lista = ["ola", "mundo", "aqui", "estamos"]
>>> csv_values = ','.join(lista)
>>> print csv_values
ola,mundo,aqui,estamos
```

Aplicando uma função (neste caso, anônima) a todos elementos de uma lista:

```
>>> lista = range(1, 11)
>>> print map(lambda x: x*-1, lista)
[-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10]
```

Filtrando os elementos de uma lista de acordo com um critério:

```
>>> def criterio(x): return x >= 0
>>> print range(-5, 5)
[-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4]
>>> print filter(criterio, range(-5, 5))
[0, 1, 2, 3, 4]
```

Retirando os elementos cujo valor é zero (ou melhor, cujo valor é avaliado como False):

```
>>> print filter(None, range(-2, 2))
[-2, -1, 1]
```

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 8

# Strings

Além de números, Python também pode manipular strings (sequências de caracteres), que podem ser expressas de diversas formas. Elas podem ser delimitadas por aspas simples ou duplas:

```
>>> 'spam eggs'
'spam eggs'
>>> 'doesn\'t'
"doesn't"
>>> "doesn't"
"doesn't"
>>> '"Yes," he said.'
'"Yes," he said.'
>>> "\"Yes,\" he said."
'"Yes," he said.'
>>> '"Isn\'t," she said.'
'"Isn\'t," she said.'
```

O interpretador exibe o resultado de operações com strings da mesma forma como elas são digitadas na entrada: dentro de aspas, e com aspas, caracteres acentuados e outros caracteres especiais representados por sequências de escape com barras invertidas (como `'\t'`, `'\xc3\xa9'` etc.), para mostrar o valor preciso. A string é delimitada entre aspas simples, exceto quando ela contém uma aspa simples e nenhuma aspa dupla. O comando print produz uma saída mais legível para tais strings com caracteres especiais.

Strings que contém mais de uma linha podem ser construídas de diversas maneiras. Linhas de continuação podem ser usadas, com uma barra invertida colocada na última posição para indicar que a próxima linha física é a continuação de uma linha lógica:

```
oi = "Eis uma string longa contendo\n\
diversas linhas de texto assim como se faria em C.\n\
```

Strings podem ser indexadas; como em C, o primeiro caractere da string tem índice 0 (zero). Não existe um tipo específico para caracteres; um caractere é simplesmente uma string de tamanho 1. Assim como na linguagem Icon, substrings podem ser especificadas através da notação de slice (fatiamento ou intervalo): dois índices separados por dois pontos.

```
>>> palavra[4]
'a'
>>> palavra[0:2]
'Aj'
>>> palavra[2:4]
'ud'
```

Índices de fatias têm defaults úteis; a omissão do primeiro índice equivale a zero, a omissão do segundo índice equivale ao tamanho da string sendo fatiada.:

```
>>> palavra[:2]     # Os dois primeiros caracteres
'Aj'
>>> palavra[2:]     # Tudo menos os dois primeiros caracteres
'udaZ'
```

Diferentemente de C, strings em Python não podem ser alteradas. Tentar atribuir valor a uma posição (índice ou fatia) dentro de uma string resulta em erro:

```
>>> palavra[0] = 'x'
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: 'str' object does not support item assignment
>>> palavra[:1] = 'Splat'
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: 'str' object does not support item assignment
```

Entretanto, criar uma nova string combinando conteúdos é fácil e eficiente:

```
>>> 'x' + palavra[1:]
'xjudaZ'
>>> 'Splat' + palavra[5]
'SplatZ'
```

Eis uma invariante interessante das operações de fatiamento: s[:i] + s[i:] é igual a s. Intervalos fora de limites são tratados "graciosamente" (N.d.T: o termo original "gracefully" indica robustez no tratamento de erros): um índice maior que o comprimento é trocado pelo comprimento, um limite superior menor que o limite inferior produz uma string vazia.

```
>>> palavra[1:100]
'judaZ'
>>> palavra[10:]
''
>>> palavra[2:1]
''
```

Índices podem ser números negativos, para iniciar a contagem pela direita. Por exemplo:

```
>>> palavra[-1]   # O último caractere
'Z'
>>> palavra[-2]   # O penúltimo caractere
'a'
>>> palavra[-2:]  # Os dois últimos caracteres
'aZ'
>>> palavra[:-2]  # Tudo menos os dois últimos caracteres
'Ajud'
```

Observe que -0 é o mesmo que 0, logo neste caso não se conta a partir da direita!

```
>>> palavra[-0]
'A'
```

Intervalos fora dos limites da string são truncados, mas não tente isso com índices simples (que não sejam fatias):

```
>>> palavra[-100:]
'AjudaZ'
>>> palavra[-100]
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
IndexError: string index out of range
```

Uma maneira de lembrar como slices funcionam é pensar que os índices indicam posições entre caracteres, onde a borda esquerda do primeiro caractere é 0. Assim, a borda direita do último caractere de uma string de comprimento n tem índice n, por exemplo:

```
 0   1   2   3   4   5   6
 +---+---+---+---+---+---+
 | A | j | u | d | a | z |
 +---+---+---+---+---+---+
-6  -5  -4  -3  -2  -1
```

A primeira fileira de números indica a posição dos índices 0...6 na string; a segunda fileira indica a posição dos respectivos índices negativos. Uma fatia de i a j consiste em todos os caracteres entre as bordas i e j, respectivamente.

Para índices positivos, o comprimento da fatia é a diferença entre os índices, se ambos estão dentro dos limites da string. Por exemplo, comprimento de palavra[1:3] é 2.

A função built-in (embutida) len() devolve o comprimento de uma string:

```
>>> s = 'anticonstitucionalissimamente'
>>> len(s)
29
```

Sequence Types — str, unicode, list, tuple, bytearray, buffer, xrange Strings, e as strings Unicode descritas na próxima seção, são exemplos de sequências e implementam as operações comuns associadas com esses objetos.

### 8.0.1 String Methods

Tanto strings comuns quanto Unicode oferecem um grande número de métodos para busca e transformações básicas. Eis alguns

#### .capitalize()

Transforma o primeiro caractere de uma string em maísculo. Ignora caracteres acentuados ou que não sejam letras.

```
>>> "curitiba".capitalize()
'Curitiba'
>>> "ágora".capitalize()
ágora
```

#### .center()

Centraliza a string usando espaços à esquerda e à direita, até atingir a largura.

```
>>> "paraná".center(20)
'       paraná       '
>>> "paraná".center(2)
'paraná'
```

#### .count()

Conta a quantidade de substrings dentro da string

```
>>> "abracadabra".count("ab")
2
>>> "abracadabra".count("a")
5
```

#### .find()

Retorna a primeira ocorrência do substring dentro da string. Caso nada seja encontrado, retorna -1.

```
>>> "abracadabra".count("ab")
2
>>> "abracadabra".count("a")
5
```

#### Avaliadores

São eles: `.isalpha()`, `.isdecimal()`, `.isdigit()`, `.islower()`,`.isnumeric()`, `.isspace()`, `.istitle()`, `.isupper()`. Retornam `True` caso a string seja composta exclusivamente de alfanuméricos, decimais, dígitos, minúsculos, numéricos, espaços, títulos (a primeira letra de cada palavra em maiúsculo) e maiúsculas. Todos ignoram as letras acentuadas.

#### .join()

Concatena todos os elementos dentro de iterável usando a string especificada como concatenador. A string pode ser vazia. Os elementos do iterável devem ser string.

```
>>> a=['agua', 'fogo', 'xabu']
>>> ''.join(a)
'aguafogoxabu'
>>> '\n'.join(a)
'agua\nfogo\nxabu'
>>> print('\n'.join(a))
agua
fogo
xabu
```

 ©75-18, Pedro Kantek

**.partition()**

Divide a string em uma tupla com 3 elementos: a parte anterior à primeira ocorrência do `separador`, o separador e a parte posterior ao separador

```
>>> "curitibaparanabrasil".partition('ra')
('curitibapa', 'ra', 'nabrasil')
>>> "curitibaparanabrasil".partition('z')
('curitibaparanabrasil', '', '')
```

**.replace()**

Substitui $n$ ocorrências da substring `antiga` pela `nova`. Se $n$ não é fornecido, ele substitui todas.

```
>>> "curitibaparanabrasil".replace("ra","agora")
'curitibapaagoranabagorasil'
>>> "curitibaparanabrasil".replace("ra","zz",1)
'curitibapazznabrasil'
```

**.split()**

Divide a string transformando-a em uma lista usando um separador $n$ vezes. Se o separador não é informado ele usa um espaço em branco.

```
>>> "curitibaparanabrasil".split('a')
['curitib', 'p', 'r', 'n', 'br', 'sil']
>>> "curitiba parana brasil".split()
['curitiba', 'parana', 'brasil']
```

**Muitos outros**

Aqui estão só alguns, talvez os mais úteis e/ou principais. Consulte a documentação da versão de Python que você está usando. Estão todos lá.

### 8.0.2 String Formatting Operations

As operações de formatação de strings antigas, que acontecem quando strings simples e Unicode aparecem à direita do operador % são descritas dom mais detalhes nesta seção.

**Strings Unicode**

Um novo tipo para armazenar textos foi introduzido: o tipo unicode. Ele pode ser usado para armazenar e manipular dados no padrão Unicode (veja http://www.unicode.org/) e se integra bem aos objetos string pré-existentes, realizando conversões automáticas quando necessário.

Unicode tem a vantagem de associar um único número ordinal a cada caractere, para todas as formas de escrita usadas em textos modernos ou antigos. Anteriormente, havia somente 256 números ordinais possíveis para identificar caracteres. Cada texto era tipicamente limitado a uma "code page" (uma tabela de códigos) que associava ordinais aos caracteres. Isso levou a muita confusão especialmente no âmbito da internacionalização de software (comumente escrito como i18n porque internationalization é 'i' + 18 letras + 'n'). Unicode resolve esses problemas ao definir uma única tabela de códigos para todos os conjuntos de caracteres.

Criar strings Unicode em Python é tão simples quanto criar strings normais:

```
>>> u'Hello World !'
u'Hello World !'
```

O u antes das aspas indica a criação de uma string Unicode. Se você desejar incluir caracteres especiais na string, você pode fazê-lo através da codificação Unicode-Escape de Python. O exemplo a seguir mostra como:

```
>>> u'Hello\u0020World !'
u'Hello World !'
```

O código de escape `\u0020` insere um caractere Unicode com valor ordinal 0x0020 (o espaço em branco) naquela posição.

Os outros caracteres são interpretados usando seus valores ordinais como valores ordinais em Unicode. Se você possui strings literais na codificação padrão Latin-1 que é usada na maioria dos países ocidentais, achará conveniente que os 256 caracteres inferiores do Unicode coincidem com os 256 caracteres do Latin-1.

Além dessas codificações padrão, Python oferece todo um conjunto de maneiras de se criar strings Unicode a partir de alguma codificação conhecida.

A função embutida unicode() dá acesso a todos os codecs Unicode registrados (COders e DECoders). Alguns dos codecs mais conhecidos são: Latin-1, ASCII, UTF-8, e UTF-16. Os dois últimos são codificações de tamanho variável para armazenar cada caractere Unicode em um ou mais bytes. (N.d.T: no Brasil, é muito útil o codec cp1252, variante estendida do Latin-1 usada na maioria das versões do MS Windows distribuídas no país, contendo caracteres comuns em textos, como aspas assimétricas “x” e ‘y’, travessão —, bullet • etc.).

Para converter uma string Unicode em uma string de 8-bits usando uma codificação específica, basta invocar o método encode() de objetos Unicode passando como parâmetro o nome da codificação destino. É preferível escrever nomes de codificação em letras minúsculas.

Se você tem um texto em uma codificação específica, e deseja produzir uma string Unicode a partir dele, pode usar a função unicode(), passando o nome da codificação de origem como segundo argumento.

### 8.0.3 Manipulação de bits

Embora seja algo meio fora de moda, eventualmente você vai precisar manusear bits em strings. Eis algumas funções

```
>>> bin(97)
'0b1100001'
>>> int('1100001',2)
97
>>> chr(97)
'a'
>>> ord('a')
97
>>> bin(ord('a'))
'0b1100001'
>>> chr(int('1100001',2))
'a'
>>> chr(int('01100001',2))
'a'
```

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 9

# Funções

Podemos criar uma função que escreve a série de Fibonacci até um limite arbitrário:

```
>>> def fib(n):    # escrever série de Fibonacci até n
...     """Exibe série de Fibonacci até n"""
...     a, b = 0, 1
...     while a < n:
...  print a,
...  a, b = b, a+b
...
>>> # Agora invocamos a funçao que acabamos de definir:
... fib(2000)
0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597
```

A palavra reservada def inicia a definição de uma função. Ela deve ser seguida do nome da função e da lista de parâmetros formais entre parênteses. Os comandos que formam o corpo da função começam na linha seguinte e devem ser indentados.

Opcionalmente, a primeira linha lógica do corpo da função pode ser uma string literal, cujo propósito é documentar a função. Se presente, essa string chama-se docstring. (Há mais informação sobre docstrings na seção Strings de documentação.) Existem ferramentas que utilizam docstrings para produzir automaticamente documentação online ou para imprimir, ou ainda permitir que o usuário navegue interativamente pelo código. É uma boa prática incluir sempre docstrings em suas funções, portanto, tente fazer disto um hábito.

A execução de uma função gera uma nova tabela de símbolos, usada para as variáveis locais da função. Mais precisamente, toda atribuição a variável dentro da função armazena o valor na tabela de símbolos local. Referências a variáveis são buscadas primeiramente na tabela local, então na tabela de símbolos global e finalmente na tabela de nomes embutidos (built-in). Portanto, não se pode atribuir diretamente um valor a uma variável global dentro de uma função (a menos que se utilize a declaração global antes), ainda que variáveis globais possam ser referenciadas livremente.

Os parâmetros reais (argumentos) de uma chamada de função são introduzidos na tabela de símbolos local da função no momento da invocação, portanto, argumentos são passados por valor (onde o valor é sempre uma referência para objeto, não o valor do objeto). [1] Quando uma função invoca outra, uma nova tabela de símbolos é criada para tal chamada.

Uma definição de função introduz o nome da função na tabela de símbolos atual. O valor associado ao nome da função tem um tipo que é reconhecido pelo interpretador como uma função definida pelo usuário. Esse valor pode ser atribuído a outros nomes que também podem ser usados como funções. Esse mecanismo serve para renomear funções:

```
>>> fib
<function fib at 10042ed0>
>>> f = fib
>>> f(100)
0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89
```

Conhecendo outras linguagens, você pode questionar que fib não é uma função, mas um procedimento, pois ela não devolve um valor. Na verdade, mesmo funções que não usam o comando return devolvem um valor, ainda que pouco interessante. Esse valor é chamado None (é um nome embutido). O interpretador interativo evita escrever None quando ele é o único resultado de uma expressão. Mas se quiser vê-lo pode usar o comando print:

```
>>> fib(0)
>>> print fib(0)
None
```

É fácil escrever uma função que devolve uma lista de números série de Fibonacci, ao invés de exibi-los:

```
>>> def fib2(n): # devolve a série de Fibonacci até n
...     """Devolve uma lista a com série de Fibonacci até n."""
...     resultado = []
...     a, b = 0, 1
...     while a < n:
...  resultado.append(a)    # veja mais adiante
...  a, b = b, a+b
...     return resultado
...
>>> f100 = fib2(100)    # executar
>>> f100       # exibir o resultado
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89]
```

Este exemplo, como sempre, demonstra algumas características novas:

O comando return termina a função devolvendo um valor. Se não houver uma expressão após o return, o valor None é devolvido. Se a função chegar ao fim sem o uso explícito do return, então também será devolvido o valor None. O trecho resultado.append(a) invoca um método do objeto lista resultado. Um método é uma função que "pertence" a um objeto e é chamada através de obj.nome_do_metodo onde obj é um objeto qualquer (pode ser uma expressão), e nome_do_metodo é o nome de um método que foi definido pelo tipo do objeto. Tipos diferentes definem métodos diferentes. Métodos de diferentes tipos podem ter o mesmo nome sem ambiguidade. (É possível definir seus próprios tipos de objetos e métodos, utilizando classes, veja em Classes) O método append() mostrado no exemplo é definido para objetos do tipo lista; ele adiciona um novo elemento ao final da lista. Neste exemplo, ele equivale a resultado = resultado + [a], só que mais eficiente.

## 9.1 Mais sobre definição de funções

É possível definir funções com um número variável de argumentos. Existem três formas, que podem ser combinadas.

### 9.1.1 Parâmetros com valores default

A mais útil das três é especificar um valor default para um ou mais parâmetros formais. Isso cria uma função que pode ser invocada com um número menor de argumentos do que ela pode receber. Por exemplo:

```
def confirmar(pergunta, tentativas=4, reclamacao='Sim ou não, por favor!'):
    while True:
 ok = raw_input(pergunta).lower()
 if ok in ('s', 'si', 'sim'):
   return True
 if ok in ('n', 'no', 'não', 'nananinanão'):
   return False
 tentativas = tentativas - 1
 if tentativas == 0:
   raise IOError('usuario nao quer cooperar')
 print reclamacao
```

Essa função pode ser invocada de várias formas:

- fornecendo apenas o argumento obrigatório: confirmar('Deseja mesmo encerrar?')
- fornecendo um dos argumentos opcionais: confirmar('Sobrescrever o arquivo?', 2) ou
- fornecendo todos os argumentos: confirmar('Sobrescrever o arquivo?', 2, 'Escolha apenas s ou n')

Este exemplo também introduz o operador `in`, que verifica se uma sequência contém ou não um determinado valor.

Os valores default são avaliados no momento a definição da função, e no escopo em que a função foi definida, portanto:

```
i = 5

def f(arg=i):
    print arg

i = 6
f()
irá exibir 5.
```

Aviso importante: Valores default são avaliados apenas uma vez. Isso faz diferença quando o valor default é um objeto mutável como uma lista ou dicionário (N.d.T. dicionários são como arrays associativos ou HashMaps em outras linguagens; ver Dicionários).

Por exemplo, a função a seguir acumula os argumentos passados em chamadas subsequentes:

```
def f(a, L=[]):
    L.append(a)
    return L

print f(1)
print f(2)
print f(3)
```

Esse código vai exibir:

```
[1]
[1, 2]
[1, 2, 3]
```

Se você não quiser que o valor default seja compartilhado entre chamadas subsequentes, pode reescrever a função assim:

```
def f(a, L=None):
    if L is None:
 L = []
    L.append(a)
    return L
\subsection{Argumentos \index{nomeados}nomeados}
Funções também podem ser chamadas passando keyword arguments (argumentos nomeados) no formato
\begin{verbatim}
def parrot(voltage, state='a stiff', action='voom', type='Norwegian Blue'):
    print "-- This parrot wouldn't", action,
    print "if you put", voltage, "volts through it."
    print "-- Lovely plumage, the", type
    print "-- It's", state, "!"
```

aceita um argumento obrigatório (voltage) e três argumentos opcionais (state, action, e type). Esta função pode ser invocada de todas estas formas:

```
parrot(1000) # 1 arg. posicional
parrot(voltage=1000)  # 1 arg. nomeado
parrot(voltage=1000000, action='VOOOOOM')      # 2 arg. nomeados
parrot(action='VOOOOOM', voltage=1000000)      # 2 arg. nomeados
parrot('a million', 'bereft of life', 'jump')  # 3 arg. posicionais
# 1 arg. positional e 1 arg. nomeado
parrot('a thousand', state='pushing up the daisies')
```

mas todas as invocações a seguir seriam inválidas:

```
parrot()   # argumento obrigatório faltando
parrot(voltage=5.0, 'dead')  # argumento posicional depois do nomeado
parrot(110, voltage=220)     # valur duplicado para o mesmo argument
parrot(actor='John Cleese')  # argumento nomeado desconhecido
```

Em uma invocação, argumentos nomeados devem vir depois dos argumentos posicionais. Todos os argumentos nomeados passados devem casar com os parâmetros formais definidos pela função (ex. actor não é um argumento nomeado válido para a função parrot), mas sua ordem é irrelevante. Isto também inclui argumentos obrigatórios (ex.: parrot(voltage=1000) funciona). Nenhum parâmetro pode receber mais de um valor. Eis um exemplo que não funciona devido a esta restrição:

```
>>> def function(a):
...     pass
...
>>> function(0, a=0)
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in ?
TypeError: function() got multiple values for keyword argument 'a'
```

 ©75-18, Pedro Kantek

Quando o último parâmetro formal usar a sintaxe **nome, ele receberá um dicionário (ver Dicionários ou Mapping Types — dict [online]) com todos os parâmetros nomeados passados para a função, exceto aqueles que corresponderam a parâmetros formais definidos antes. Isto pode ser combinado com o parâmetro formal *nome (descrito na próxima subseção) que recebe uma tupla (N.d.T. uma sequência de itens, semelhante a uma lista imutável; ver Tuplas e sequências) contendo todos argumentos posicionais que não correspondem à lista da parâmetros formais. (*nome deve ser declarado antes de **nome.) Por exemplo, se definimos uma função como esta:

```
def cheeseshop(kind, *arguments, **keywords):
    print "-- Do you have any", kind, "?"
    print "-- I'm sorry, we're all out of", kind
    for arg in arguments:
 print arg
    print "-" * 40
    keys = sorted(keywords.keys())
    for kw in keys:
 print kw, ":", keywords[kw]
```

Ela pode ser invocada assim:

```
cheeseshop("Limburger", "It's very runny, sir.",
  "It's really very, VERY runny, sir.",
  shopkeeper='Michael Palin',
  client="John Cleese",
  sketch="Cheese Shop Sketch")
```

e, naturalmente, produziria:

```
-- Do you have any Limburger ?
-- I'm sorry, we're all out of Limburger
It's very runny, sir.
It's really very, VERY runny, sir.
----------------------------------------
client : John Cleese
shopkeeper : Michael Palin
sketch : Cheese Shop Sketch
```

Note que criamos uma lista de chaves keys ordenando o resultado do método keys() do dicionário keywords antes de exibir seu conteúdo; se isso não fosse feito, os argumentos seriam exibidos em uma ordem não especificada.

### 9.1.2 Listas arbitrárias de argumentos

Finalmente, a opção menos usada possibilita que função seja invocada com um número arbitrário de argumentos. Esses argumentos serão empacotados em uma tupla (ver Tuplas e sequências). Antes dos argumentos em número variável, zero ou mais argumentos normais podem estar presentes.

```
def escrever_multiplos_items(arquivo, separador, *args):
    arquivo.write(separador.join(args))
```

### 9.1.3 Desempacotando listas de argumentos

A situação inversa ocorre quando os argumentos já estão numa lista ou tupla mas ela precisa ser explodida para invocarmos uma função que requer argumentos posicionais separados. Por exemplo, a função range() espera argumentos separados, start e stop. Se os valores já estiverem juntos em uma lista ou tupla, escreva a chamada de função com o operador * para desempacotá-los da sequência:

```
>>> range(3, 6)     # chamada normal com argumentos separados
[3, 4, 5]
>>> args = [3, 6]
>>> range(*args)    # chamada com argumentos desempacotados de uma lista
[3, 4, 5]
```

Da mesma forma, dicionários podem produzir argumentos nomeados com o operador **:

```
>>> def parrot(voltage, state='a stiff', action='voom'):
...     print "-- This parrot wouldn't", action,
...     print "if you put", voltage, "volts through it.",
...     print "E's", state, "!"
```

```
...
>>> d = {"voltage": "four million", "state": "bleedin' demised", "action": "VOOM"}
>>> parrot(**d)
```

– This parrot wouldn't VOOM if you put four million volts through it. E's bleedin' demised !

### 9.1.4 Construções lambda

Atendendo a pedidos, algumas características encontradas em linguagens de programação funcionais como Lisp foram adicionadas a Python. Com a palavra reservada lambda, pequenas funções anônimas podem ser criadas. Eis uma função que devolve a soma de seus dois argumentos:

```
lambda a, b: a+b.
```

Construções lambda podem ser empregadas em qualquer lugar que exigiria uma função. Sintaticamente, estão restritas a uma única expressão. Semanticamente, são apenas açúcar sintático para a definição de funções normais. Assim como definições de funções aninhadas, construções lambda podem referenciar variáveis do escopo onde são definidas (N.d.T isso significa que Python implementa closures, recurso encontrado em Lisp, JavaScript, Ruby etc.):

```
>>> def fazer_incrementador(n):
...     return lambda x: x + n
...
>>> f = fazer_incrementador(42)
>>> f(0)
42
>>> f(1)
43
```

### 9.1.5 Strings de documentação

A comunidade Python está convencionando o conteúdo e o formato de strings de documentação (docstrings).

A primeira linha deve ser um resumo curto e conciso do propósito do objeto. Por brevidade, não deve explicitamente se referir ao nome ou tipo do objeto, uma vez que estas informações estão disponíveis por outros meios (exceto se o nome da função for o próprio verbo que descreve a finalidade da função). Essa linha deve começar com letra maiúscula e terminar com ponto.

Se existem mais linhas na string de documentação, a segunda linha deve estar em branco, separando visualmente o resumo do resto da descrição. As linhas seguintes devem conter um ou mais parágrafos descrevendo as convenções de chamada ao objeto, seus efeitos colaterais, etc.

O parser do Python não remove a indentação de comentários multi-linha. Portanto, ferramentas que processem strings de documentação precisam lidar com isso, quando desejável. Existe uma convenção para isso. A primeira linha não vazia após a linha de sumário determina a indentação para o resto da string de documentação. (Não podemos usar a primeira linha para isso porque ela em geral está adjacente às aspas que iniciam a string, portanto sua indentação real não fica aparente.) Espaços em branco ou tabs "equivalentes" a esta indentação são então removidos do início das demais linhas da string. Linhas indentação menor não devem ocorrer, mas se ocorrerem, todos os espaços à sua esquerda são removidos. Para determinar a indentação, normalmente considera-se que um caractere tab equivale a 8 espaços.

Eis um exemplo de uma docstring multi-linha:

```
>>> def minha_funcao():
...     """Não faz nada, mas é documentada.
...
...     Realmente ela não faz nada.
...     """
...     pass
...
>>> print minha_funcao.__doc__
Não faz nada, mas é documentada.

Realmente ela não faz nada.
```

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 10

# Arquivos

A função open() devolve um objeto arquivo, e é frequentemente usada com dois argumentos: open(nome_do_arquivo, modo).

```
>>> f = open('/tmp/workfile', 'w')
>>> print f
<open file '/tmp/workfile', mode 'w' at 80a0960>
```

O primeiro argumento é uma string contendo o nome do arquivo. O segundo argumento é outra string contendo alguns caracteres que descrevem o modo como o arquivo será usado. O parâmetro mode pode ser 'r' quando o arquivo será apenas lido, 'w' para escrever (se o arquivo já existir seu conteúdo prévio será apagado), e 'a' para abrir o arquivo para adição; qualquer escrita será adicionada ao final do arquivo. A opção 'r+' abre o arquivo tanto para leitura como para escrita. O parâmetro mode é opcional, em caso de omissão será assumido 'r'.

No Windows, 'b' adicionado a string de modo indica que o arquivo será aberto em modo binário. Sendo assim, existem os modos compostos : 'rb', 'wb', e 'r+b'. O Windows faz distinção entre arquivos texto e binários: os caracteres terminadores de linha em arquivos texto são alterados ao ler e escrever. Essa mudança automática é útil em arquivos de texto ASCII, mas corrompe arquivos binários como .JPEG ou .EXE. Seja cuidadoso e use sempre o modo binário ao manipular tais arquivos. No Unix, não faz diferença colocar um 'b' no modo, então você pode usar isto sempre que quiser lidar com arquivos binários de forma independente da plataforma.

N.d.T. Para ler arquivos de texto contendo acentuação e outros caracteres não-ASCII, a melhor prática desde o Python 2.6 é usar a função io.open(), do módulo io, em vez da função embutida open(). O motivo é que io.open() permite especificar a codificação logo ao abrir um arquivo em modo texto para leitura ou escrita. Desta forma, a leitura do arquivo texto sempre devolverá objetos unicode, independente da codificação interna do arquivo no disco. E ao escrever em um arquivo aberto via io.open(), basta enviar strings unicode, pois a conversão para o encoding do arquivo será feita automaticamente. Note que ao usar io.open() sempre faz diferença especificar se o arquivo é binário ou texto, em todos os sistemas operacionais: o modo texto é o default, mas se quiser ser explícito coloque a letra t no parâmetro mode (ex. rt, wt etc.); use use a letra b (ex. rb, wb etc.) para especificar modo binário. Somente em modo texto os métodos de gravação e leitura aceitam e devolvem strings unicode. Em modo binário, o método write aceita strings de bytes, e os métodos de leitura devolvem strings de bytes também.

## 10.1 Métodos de objetos arquivo

Para simplificar, o resto dos exemplos nesta seção assumem que um objeto arquivo chamado f já foi criado.

Para ler o conteúdo de um arquivo, invoque f.read(size), que lê um punhado de dados devolvendo-os como uma string de bytes str. O argumento numérico size é opcional. Quando size é omitido ou negativo, todo o conteúdo do arquivo é lido e devolvido; se o arquivo é duas vezes maior que memória da máquina, o problema é seu. Caso contrário, no máximo size bytes serão lidos e devolvidos. Se o fim do arquivo for atingido, f.read() devolve uma string vazia ().

```
>>> f.read()
'Texto completo do arquivo.\n'
>>> f.read()
''
```

O método f.readline() lê uma única linha do arquivo; o caractere de quebra de linha (`'\n'`) é mantido ao final da string, só não ocorrendo na última linha do arquivo, se ela não termina com uma quebra de linha. Isso elimina a ambiguidade do valor devolvido; se f.readline() devolver uma string vazia, então é certo que arquivo acabou. Linhas em branco são representadas por um `'\n'` – uma string contendo apenas o terminador de linha.

```
>>> f.readline()
'Primeira linha do arquivo.\n'
```

```
>>> f.readline()
'Segunda linha do arquivo.\n'
>>> f.readline()
''
```

O método f.readlines() devolve uma lista contendo todas as linhas do arquivo. Se for fornecido o parâmetro opcional sizehint, será lida a quantidade especificada de bytes e mais o suficiente para completar uma linha. Frequentemente, isso é usado para ler arquivos muito grandes por linhas, sem ter que ler todo o arquivo para a memória de uma só vez. Apenas linhas completas serão devolvidas.

```
>>> f.readlines()
['Primeira linha do arquivo.\n', 'Segunda linha do arquivo.\n']
```

Uma maneira alternativa de ler linhas do arquivo é iterar diretamente pelo objeto arquivo. É eficiente, rápido e resulta em código mais simples:

```
>>> for line in f:
 print line,
```

gerará o seguinte resultado

```
Primeira linha do arquivo.
Segunda linha do arquivo.
```

Essa alternativa é mais simples, mas não oferece tanto controle. Como as duas maneiras gerenciam o buffer do arquivo de modo diferente, elas não devem ser misturadas.

O método f.write(string) escreve o conteúdo da string de bytes para o arquivo, devolvendo None.

```
>>> f.write('Isto é um teste.\n')
```

N.d.T. Neste exemplo, a quantidade de bytes que será escrita no arquivo vai depender do encoding usado no console do Python. Por exemplo, no encoding UTF-8, a string acima tem 18 bytes, incluindo a quebra de linha, porque são necessários dois bytes para representar o caractere 'é'. Mas no encoding CP1252 (comum em Windows no Brasil), a mesma string tem 17 bytes. O método f.write apenas escreve bytes; o que eles representam você decide.

Ao escrever algo que não seja uma string de bytes, é necessário converter antes:

```
>>> valor = ('a resposta', 42)
>>> s = str(valor)
>>> f.write(s)
```

N.d.T. Em particular, se você abriu um arquivo f com a função embutida open(), e deseja escrever uma string Unicode x usando f.write, deverá usar o método unicode.encode() explicitamente para converter x do tipo unicode para uma string de bytes str, deste modo: f.write(x.encode('utf-8')). Por outro lado, se abriu um arquivo f2 com io.open(), pode usar f2.write(x) diretamente, pois a conversão de x – de unicode para o encoding do arquivo – será feita automaticamente.

O método f.tell() devolve um inteiro long que indica a posição atual de leitura ou escrita no arquivo, medida em bytes desde o início do arquivo. Para mudar a posição utilize f.seek(offset, de_onde). A nova posição é computada pela soma do deslocamento offset a um ponto de referência especificado pelo argumento de_onde. Se o valor de de_onde é 0, a referência é o início do arquivo, 1 refere-se à posição atual, e 2 refere-se ao fim do arquivo. Este argumento pode ser omitido; o valor default é 0.

```
>>> f = open('/tmp/workfile', 'r+')
>>> f.write('0123456789abcdef')
>>> f.seek(5)     # Vai para o sexto byte do arquivo
>>> f.read(1)
'5'
>>> f.seek(-3, 2) # Vai para terceiro byte antes do fim
>>> f.read(1)
'd'
```

Quando acabar de utilizar o arquivo, invoque f.close() para fechá-lo e liberar recursos do sistema (buffers, descritores de arquivo etc.). Qualquer tentativa de acesso ao arquivo depois dele ter sido fechado resultará em falha.

```
>>> f.close()
>>> f.read()
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in ?
ValueError: I/O operation on closed file
```

É uma boa prática usar o comando with ao lidar com objetos arquivo. Isto tem a vantagem de garantir que o arquivo seja fechado quando a execução sair do bloco dentro do with, mesmo que uma exceção tenha sido levantada. É também muito mais sucinto do que escrever os blocos try-finally necessários para garantir que isso aconteça.

```
>>> with open('/tmp/workfile', 'r') as f:
...     read_data = f.read()
>>> f.closed
True
```

Objetos arquivo têm métodos adicionais, como isatty() e truncate() que são usados com menos frequência; consulte a Referência da Biblioteca Python para mais informações.

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 11

# Pacotes em Python

## 11.1 Conceito

## 11.2 Instalação

## 11.3 uma amostra

Uma pequena amostra dos mais de 100.000 pacotes existentes no ambiente Python

## 11.4 LISTA DE PACOTES PYTHON

| PACOTE | FINALIDADE |
|---|---|
| TENSORFLOW | Implementa redes neurais em python. Autoria: google |
| PYEASYGA | Implementa algoritmos de algoritmos genéticos |
| DEAP | Implementa algoritmos de computação evolutiva, incluindo GA |
| BOKEH | Apresentação de dados: tabelas, desenhos e inúmeras formas de apresentação de dados |
| MATPLOTLIB | Apresentação de dados |
| PYGAME | Toda a infraestrutura para escrever games em python |
| TKINTER | Interface TK para escrever aplicativos gráficos em python |
| NUMPY | Computação numérica em python |
| TURTLE | Simulação da linguagem LOGO |
| RANDOM | Todas as tratativas para manuseio de números aleatórios |
| ASTROPY | manuseia arquivos digitais FITS |
| DJANGO | Framework web |
| FLASK | Framework web |
| HUG | Framework web |
| KERAS | Machine learning, mais fácil que o tensor flow |
| SCIKIT-LEARN | Machine learning |
| THEANO | Machine learning |
| OpenCV | Visão computacional |
| ORANGE3 | Framework para data mining |
| SCRAPY | Um crawler (spider fuçadeira) em python |
| PYODBC | ODBC em python (para acessar bancos de dados) |
| SPHINX | Documentador em python (originalmente desenvolvido para documentar o python, mas pode ser usado em outros ambientes) |
| REQUESTS | Requisições HTTP |
| COLLECTIONS | Mantém histórico de processamentos em contendores. Elabora diversos processamentos auxiliares em listas. |
| HEAPQ | recupera os $n$ maiores ou menores em uma coleção usando um *heap* |
| RE | Processamento extensivo de expressões regulares, por exemplo pesquisando e substituindo strings. |
| UNICODEDATA | Normalização e compatibilização de strings UTF-8, UTF-16, ASCII, Latin1, entre muitos outros. |
| TEXTWRAP | reformatar texto em diversas modalidades. |

| | |
|---|---|
| DECIMAL | Implementa a *general decimal arithmetic specification* da IBM. |
| CMATH | Aritmética e álgebra complexa. |
| RANDOM | Funções para números aleatórios. |
| DATETIME | conversões e aritmética envolvendo diferentes unidades de tempo. |
| ITERTOOLS | ferramentas adicionais de iteração. Por exemplo, ele gera todas as combinações ou permutações de um contendor. |
| GZIP e BZ2 | Comprime e descomprime conteúdos usando GZIP ou BZ2. |
| FNMATCH | processa nomes de arquivos e diretórios. |
| OS | interfaceia com o sistema operacional. |
| PYSERIAL | Manusear a interface serial do computador. |
| PICKLE | Serializar objetos. |
| CSV | Manusear arquivos tipo CSV. |
| JSON | Manusear dados JSON. |
| XML | Manusear objetos XML. |
| BASE64 | Converter de e para Base64. |
| STRUCT | Manusear objetos binários complexos, registros variáveis aninhados, etc. |
| PANDAS | Análise de dados envolvendo estatísticas, séries temporais e técnicas relacionadas. |
| FUNCTOOLS | Ferramentas adicionais para definição de funções. (como wrapper=encapsular uma função qualquer com processamento adicional, por exemplo um timmer). |
| QUEUE | manipulação de filas e listas. |
| WEAKREF | Indireções com referências fracas (compatibilidade com gabrage collection). |
| AST | Abstract Sintax Tree, ou criar AST a partir de código fonte Python, permitindo análise e manipulação. |
| DIS | disassembly de código python. |
| SYS | Manipulação de PATHs entre outras coisas. |
| URLIB | Serviços de web. |
| SOCKET | Serviços de socket. |
| TIME | Manipulação de tempo. |
| IPADDRESS | manipulação de endereços IP. |
| CGI | Interfaces baseada em REST. |
| XMLRPC | Procedimentos remotos. |
| HMAC | Handshake para autenticação. |
| SSL | camadas SSL para segurança. |
| THREADING | Manipulação de threadings. |
| CONFIGPARSER | Manipulação de arquivos de configuração. |
| LOGGING | Manipular funções de logging. |
| RESOURCE | Impõe limites de memória ou de CPU a programas (unix). |
| WEBBROWSER | Iniciar um browser web. |
| QRCODE | Gerador e manipulador de QRCODES. |
| PYSIM | Programação simbólica (à moda do Maple) |
| MATPLOTLIB | Gráficos em python |

# Capítulo 12

# Pacote: Numpy

Para usar o numpy:

**Importação** Se quiser chamar depois os módulos como `np.modulo` importe assim

```
>>> import numpy as np
```

Se quiser chamar direto sem usar a notação de ponto, importe assim

```
>>> from numpy import *
```

**Para criar matriz** O elemento `array` é central em numpy:

```
a=np.array([[1,2,3],[3,4,5],[6,6,7]])
ou
a=np.array([(1,2,3),(3,4,5),(6,6,7)])

>>> a
array([[1, 2, 3],
       [3, 4, 5],
       [6, 6, 7]])
```

ambos jeitos devolvem. A explicação para isto é que na criação, tanto faz fornecer uma lista ou uma tupla.

**Para indexar**

```
a[1][2] é igual a 5 OU a[1,2] que igualmente é 5
```

**in** É usado para testar se um elemento está num array ou não:

```
>>> a = np.array([[1, 2, 3], [4, 5, 6]], float)
>>> 2 in a
True
>>> 0 in a
False
```

**Criação de PA** A função arange() cria uma PA, cujos termos são a=np.arange(vl_inicial, até_vl_final, incremento), como em

```
a=np.arange(1,5,0.5)
>>> a
array([ 1. , 1.5, 2. , 2.5, 3. , 3.5, 4. , 4.5])
```

**Atributos de ndarray** Um ndarray tem os seguintes atributos:

**.ndim** = número de dimensões

**.shape** = uma tupla com as dimensões

```
>>> a
array([1, 2, 3, 4])
>>> a.shape
(4,)
```

**Cópia de array** Para criar um array como cópia de outro, fazer

```
s3 = s2.copy()
```

**Reorganizar um array** Para reorganizar um array:

```
>>> a1 = np.arange(0.0, 12.0, 1.0)
>>> a1
[ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.]
>>> a2 = a1.reshape( (2,6) )
>>> print a2
[[ 0. 1. 2. 3. 4. 5.]
[ 6. 7. 8. 9. 10. 11.]]
```

**Reorganizar in place** Para reorganizar in-place

```
>>> a1
[ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.]
>>> a1.resize([2,6])
>>> a1
[[ 0. 1. 2. 3. 4. 5.]
[ 6. 7. 8. 9. 10. 11.]]
```

**Média** Para retornar a média, variância, soma e produto:

```
A.mean() -> média dos valores em A
A.var() -> variancia dos valores de A
A.sum() -> soma
A.prod() -> produto
A.max() -> maior valor
A.min() -> menor valor
A.argmax() -> índice do maior valor
A.argmin() -> índice do menor valor
unique(a) -> retorna os valores únicos
    (sem repetição) de a
```

**Funções Universais** Para funções universais (ufuncs)

```
>>> a=[1,2,3,4]
>>> b=[0.1, 0.7, 8, 9]
>>> a
[1, 2, 3, 4]
>>> b
[0.1, 0.7, 8, 9]
>>> a+b
[1, 2, 3, 4, 0.1, 0.7, 8, 9]
>>> a=np.array([1,2,3,4])
>>> b=np.array([0.1, 0.7, 8, 9])
>>> a+b
array([  1.1,   2.7,  11. ,  13. ])
```

**Broadcasting** Para broadcasting (aplicar um escalar a um array)

```
>>> a
array([1, 2, 3, 4])
>>>
>>> a+3
array([4, 5, 6, 7])
>>> b*5
array([  0.5,   3.5,  40. ,  45. ])
```

**multiplicação matricial** Multiplicação matricial:

```
>>> a1 = np.array([[1, 2, -4], [3, -1, 5]])
>>> a2 = np.array([[6, -3], [1, -2], [2, 4]])
>>> np.dot(a1,a2)
array([[  0, -23],
       [ 27,  13]])
```

**Produto vetorial** O produto vetorial é

```
>>> x = (1, 2, 0)
>>> y = (4, 5, 6)
>>> print np.cross(x, y)
[12 -6 -3]   para resolver isto ache o
    determinante da matriz
i j k
1 2 0
4 5 6, com resultados em i, j e k
```

**determinante** Para obter o determinante de uma matriz

```
>>> m = np.array(((2,3), (-1, -2)))
>>> m
[[ 2 3]
[-1 -2]]
>>> np.linalg.det(m)
-1.0
```

**Matriz inversa** E a matriz inversa

```
>>> good = np.array(((2.1, 3.2), (4.3, 5.4)))
>>> np.linalg.inv(good)
[[-2.23140496 1.32231405]
[ 1.7768595 -0.8677686 ]]
```

**Sistema de equações lineares** A solução de um sistema de equações lineares por exemplo

```
2x + y = 19
x - 2y = 2
cuja solução é (x=8 and y=3):
>>> coeffs = np.array([[2,1], [1,-2]])
>>> coeffs
[[ 2 1]
[ 1 -2]]
>>> consts = np.array((19, 2))
>>> consts
[19 2]
>>> np.linalg.solve(coeffs, consts)
[ 8. 3.]
```

**Transposta**

```
>>> a = np.array(range(6), float).reshape((2, 3))
>>> a
array([[ 0., 1., 2.],
[ 3., 4., 5.]])
>>> a.transpose()
array([[ 0., 3.],
[ 1., 4.],
[ 2., 5.]])
```

 ©75-18, Pedro Kantek

**Concatenação**

```
>>> a = np.array([1,2], float)
>>> b = np.array([3,4,5,6], float)
>>> c = np.array([7,8,9], float)
>>> np.concatenate((a, b, c))
array([1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9.])

>>> a = np.array([[1, 2], [3, 4]], float)
>>> b = np.array([[5, 6], [7,8]], float)
>>> np.concatenate((a,b))
array([[ 1., 2.],
[ 3., 4.],
[ 5., 6.],
[ 7., 8.]])
>>> np.concatenate((a,b), axis=0)
array([[ 1., 2.],
[ 3., 4.],
[ 5., 6.],
[ 7., 8.]])
>>> np.concatenate((a,b), axis=1)
array([[ 1., 2., 5., 6.],
[ 3., 4., 7., 8.]])
```

**Funções matemáticas** abs, sign, sqrt, log, log10, exp, sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan, sinh, cosh, tanh, arcsinh, arccosh, and arctanh.

floor, ceil, and rint give the lower, upper, or nearest (rounded) integer:

**Lista de nomes definidos** Para retornar uma lista de nomes definidos

```
>>> dir()
```

**subpacotes** Lista de subpacotes que ajudam na programação:

| subpacote | Objetiv |
|---|---|
| core | basic objects |
| lib | additional utilities |
| linalg | basic linear algebra |
| fft | discrete Fourier transforms |
| random | random number generators |
| distutils | enhanced build, distrib improvements |
| testing | unit-testing utility functions |
| f2py | automatic wrapping of Fortran code |

**Geração de aleatórios** Compreendidos entre 0 e 1.

```
>>> np.random.rand(3,2)
array([[ 0.14022471, 0.96360618], #random
       [ 0.37601032, 0.25528411], #random
       [ 0.49313049, 0.94909878]]) #random
```

**Inteiros aleatórios** Veja o exemplo

```
>>> randint(low[, high, size]) # Return random integers
  from low (inclusive) to high (exclusive)
```

**Para mostrar**

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> d1 = np.random.random_integers(1, 6, 1000)
>>> d2 = np.random.random_integers(1, 6, 1000)
>>> dsums=d2+d2
>>> count,bins,ignored = plt.hist(dsums,11,normed=True)
>>> plt.show()
```

**Distribuição normal** Esta função retorna simulações de uma distribuição normal. Para obter $N(\mu, \sigma^2)$, basta fazer $sigma * np.random.randn(...) + mu$. Onde $\mu$ = média da distribuição e $\sigma^2$ é a variância. Veja-se o exemplo

```
>>> 2.5 * np.random.randn(2, 4) + 3
array([[-4.4940, 4.0095, -1.8181, 7.2971], #random
       [ 0.3992, 4.6845,  4.9939, 4.8405]]) #random
```

Cria um array $2, 4$ contendo simulações de $3, 6.25$. Lembre que $2.5^2 = 6.25$.

**Distribuição binomial** Cria simulações desta distribuição. Usa 2 parâmetros: `n`, que significa o número de tentativas e `p` que vem a ser a probabilidade de sucesso da distribuição ($0 \leq p \leq 1$). A função retorna para cada simulação o número de sucessos. Lembrando que a probabilidade é

$$P(N) = \left( \begin{array}{c} n \\ N \end{array} \right) p^N (1-p)^{n-N}$$

) Veja-se o exemplo:

```
>>> n=10
>>> p=0.5
>>> s=np.random.binomial(n,p,1000)
```

O exemplo acima faz 1000 simulações, cada uma jogando 10 moedas e informando a quantidade de caras em cada simulação.

**Ordenação**

```
>>> a = np.array([[1,4],[3,1]])
>>> np.sort(a) # sort along the last axis
array([[1, 4],
       [1, 3]])
>>> np.sort(a,axis=None) #sort flattened array
array([1, 1, 3, 4])
>>> np.sort(a,axis=0) # sort along first axis
array([[1, 1],
       [3, 4]])
```

**Desvio padrão em arrays**

```
>>> a = np.array([[1, 2], [3, 4]])
>>> np.std(a)
1.1180339887498949
>>> np.std(a, axis=0)
array([ 1., 1.])
>>> np.std(a, axis=1)
array([ 0.5, 0.5])
```

## 12.1 Varejão

### 12.1.1 Para gravar arquivo de números

```
def testagra(a):
    f=open("f:/p/up2017/ofid/primos.lis","w")
    f.write(str(a)[1:-1])
    f.close()
```

### 12.1.2 Para ler o arquivo acima

e converter os números em uma lista

```
def leiapri():
    f=open("f:/p/up2017/ofid/primos.lis","r")
    a=f.read()
    pri=list(map(int,a.split(", ")))
```

 ©75-18, Pedro Kantek

# Capítulo 13

# Exercícios

## 13.1 Salada de frutas

Uma salada de frutas, produzida industrialmente leva maçã, banana, abacaxi e açúcar nas proporções de 1 Kg : 2 Kg : 0,5 Kg : 0,5 Kg respectivamente. Escreva um programa que leia 4 quantidades representando os pesos disponíveis dos quatro ingredientes, calcule e escreva a quantidade de salada que poderá ser construida, desprezando-se as quantidades que ultrapassam a proporção.

Exemplos:

| Se for lido | só serão usadas | logo total |
|---|---|---|
| 10,10,10,10 | 5,10,2.5,2.5 | 20Kg |
| 10,20,10,10 | 10,20,5,5 | 40Kg |
| 10,10,1,1 | 2,4,1,1 | 8Kg |

Ao estudar o problema e os exemplos, verifica-se que quando há 10 kg de cada ingrediente (exemplo 1) não se pode fazer 40Kg de salada, pois ao fazer isso deixa-se de observar as proporções dadas no enunciado. De fato, o exemplo aponta 20 e não 40 kg de salada.

Examinando o enunciado, ve-se que para fazer 4kg de salada, (algo que se poderia chamar de 1 módulo de salada) usam-se 1kg, 2kg, 0.5kg e 0.5kg de ingredientes respectivamente. A pergunta agora é: com os valores disponíveis de ingredientes quantos módulos de salada podem ser feitos ?

A resposta, ainda no exemplo 1, é de limitados à maçã, podem ser feitos 10 módulos. Limitados pela banana, são apenas 5 módulos, e pensando no abacaxí e no açucar seriam 20 módulos. Para manter as proporções corretas, deve-se usar o menor valor dos módulos, no caso 5. Este valor esgota o ingrediente crítico (a banana neste exemplo) e tentar produzir mais salada aqui, significaria que faltaria banana.

Decidido a produzir 5 módulos de salada, o peso final é imediato. 5 módulos vezes 4 kg de salada por módulo correspondem a 20kg de salada, que é o resultado correto dado pelo exemplo.

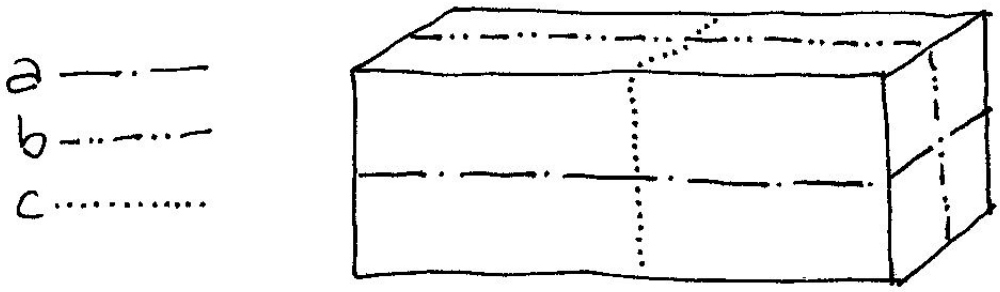
Eis o programa

```
def salada():
  print("Informe as disponibilidades de maçã, banana, abacaxí e açuçar")
  dma=float(input())
  dba=float(input())
  dab=float(input())
  dac=float(input())
  modu=[dma/1, dba/2, dab/0.5, dac/0.5]
  minimo=min(modu)
  print("A quantidade possível é ",minimo*4)
salada()
```

## 13.2 pacote no correio

De acordo com o regulamento do serviço postal de um país distante, não pode seguir pelo correio, nenhum pacote cujo comprimento (maior dimensão) somado à amarração seja superior a 72 polegadas. Amarração é o comprimento do menor barbante que possa toda a volta ao pacote. Construa um programa que leia 3 dimensões de um eventual pacote paralelepipedal (um paralelepípedo é um prisma cujas faces são paralelogramos. Um paralelepípedo tem seis faces, sendo que duas a duas são idênticas e paralelas entre si). e imprima ”SIM”se ele puder ser enviado e ”NÃO”senão. As dimensões estão em centímetros e deve usar a conversão 1pol=2.54cm

Ao estudar a definição, percebe-se que há 3 barbantes possíveis em um paralelepípedo. No desenho




percebe-se que os 3 barbantes são: $2 \times a + b$, $2 \times a + c$ e $2 \times b + c$. Então o teste deve ser feito somando-se a maior dimensão ao menor barbantes e esta soma deve ser menor do que 72 polegadas.

Como os dados do pacote estão em centímetros, a conta toda vai ser feita em centímetros e apenas no momento da compraração é que este valor vai ser convertido a polegada.

Veja o programa:

```
def correio():
  print("Informe as dimensões do paralelepípedo")
  a=float(input())
  b=float(input())
  c=float(input())
  barba=[2*(a+b), 2*(a+c), 2*(b+c)]
  menor=min(barba)
  lista=[a,b,c]
  maior=max(lista)
  dime=(menor+maior)/2.54
  if dime<=72:
    print("sim")
  else:
    print("nao")
correio()
```

## 13.3 Jogo do Palito

Este é o nosso primeiro vídeo-game. Trata-se de uma disputa entre computador e humano para ver quem ganha. O jogo começa com o humano escolhendo um número de palitos entre 20 e 30. Depois o computador tira 1, 2 ou 3 palitos. A seguir o humano faz o mesmo e assim por diante até o esgotamento dos palitos. Quem tirar o último palito perde.

Eis o código

```
def palito():
  n=0  # seq vencedora: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29
  while n<20 or n>30:
    n=int(input("com quanto começamos ?"))
  while n>0:
    seq=n%4
    if seq==1:
      j=1 #perdi, jogo 1 esperando o cara errar...
    if seq==2:
      j=1
    if seq==3:
      j=2
    if seq==0:
      j=3
    print("eu joguei", j)
    n=n-j
    print("existem", n, " palitos")
    if n<=0:
      lixo=input("por incrivel que pareça, perdi...")
      return
    tv=0
    while tv<1 or tv>3 or n-tv<0:
      tv=int(input("jogue: "))
```

```
    n=n-tv
    print("Existem ",n," palitos")
    if n<=0:
      lixo=input("seu babaca, eu ganhei")
      return
palito()
```

Se quiser comparar com a versão C++, ei-la:

```
#include <iostream>
#include<cstdlib>
using namespace std;
main() {
   int n,seq,j,tv,lixo;
   n=0;
   while ((n<20) || (n>30)) {
 cout<<"Com quanto comecamos ?"<<endl;
 cin>>n;
   }  // seq vencedora: 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29
   while(n>0){
      seq = n % 4;
      if (seq==1) {
 j=rand()%3+1;  // perdi, jogo aleatório esperando ele errar
      }
      if (seq==2) {
 j=1;
      }
      if (seq==3) {
  j=2;
  }
      if (seq==0) {
  j=3;
  }
      cout<<"eu joguei "<<j<<endl;
      n=n-j;
      cout<<"existem "<<n<<" palitos \n"<<endl;
      if (n <= 0) {
  cout<<"Por incrivel que pareca, perdi"<<endl;
  cin>>lixo;
  break;
      }
      tv=0;
      while ((tv<1) || (tv>3) || ((n-tv)<0)) {
  cout<<"jogue"<<endl;
  cin>>tv;
      }
    n=n-tv;
    cout<<"existem "<<n<<" palitos "<<endl;
    if (n<=0) {
       cout<<"babaca, eu ganhei\n";
       cin>>lixo;
       break;
      }
   }
}
```

## 13.4 MDC e MMC

Mínimo Múltiplo Comum: Dados dois números inteiros, definem-se dois valores a eles relacionados denominados MMC (mínimo múltiplo comum) e MDC (máximo divisor comum). O máximo divisor comum é o maior inteiro que divide ambos os números originais sem deixar resto. O mínimo múltiplo comum é o menor número que ao ser dividido por ambos os números originais não deixa resto.

Por exemplo, o MDC(10,15) é 5 e o MMC(10,15) é 30. Ambas as quantidades est˜ão relacionadas pela fórmula:

$$MMC(m,n) = \frac{m \times n}{MDC(m,n)}$$

Para o cálculo do MDC, pode-se usar o algoritmo devido a Euclides. Este algoritmo sempre é chamado com dois inteiros. Note que o primeiro número deve ser maior ou igual do que o segundo. Se esta condição não estiver satisfeita, na primeira chamada, os números são simplesmente invertidos, por característica do algoritmo. Isto pode ser feito, já que a operação MDC é comutativa. Acompanhe: Se $a = 27, b = 100$, $MDC(27, 100)$ é trocado por $MDC(100, 27\%100)$, sendo que o segundo operando é igual a 27, já que a divisão de 27 por 100 é igual a zero, com resto igual a 27.

Este algoritmo é recursivo, já que a função $MDC$ no seu corpo tem uma chamada à função $MDC$, sempre com um caso menor em direção ao caso base, que aqui é $b == 0$.

```
1: inteiro função MDC(inteiro a, b)
2: if b = 0 then
3:    devolva a
4: else
5:    devolva MDC(b,(a mod b))
6: end if
```

Suponha que far-se-á a chamada ao algoritmo acima, como segue: MDC(1200, 1119) O que aconteceria ? Chamando com 1200 1119, Chamando com 1119 81, Chamando com 81 66, Chamando com 66 15, Chamando com 15 6, Chamando com 6 3 e Chamando com 3 0 Resposta é 3

Eis o programa python

```
def mdc(a,b):
  if b==0:
    return a
  else:
    return mdc(b,a%b)
def exercicio():
  a=int(input("Informe a "))
  b=int(input("Informe b "))
  x=mdc(a,b)
  print(x,(a*b)//x)
exercicio()
```

## 13.5 Busca

Este é o problema fundamental da ciência da computação, a saber: Dado um vetor $V$ e uma chave $k$, quer-se saber se $k \in V$ e se isto ocorrer em que posição, ou se – ao contrário – $k \notin V$. Reespecificando melhor o problema vamos supor um vetor de inteiros $int\ V[1000]$ em C++ ou um array $V = nd.array(1000, int)$ em python ou ainda em APL: $V \leftarrow 1000\rho 0$. Independente da linguagem trata-se de um arranjo unidimensional homogêneo de inteiros, no qual se quer saber se existe ou não um determinado valor também inteiro. Existindo deve-se retornar qual a sua posição. Se houver mais de uma instância do valor $k$, deve-se retornar apenas a primeira. Se não houver, deve-se retornar um valor inválido para sua posição, tipicamente -1, significando que $k$ não existe em $V$.

Eis uma primeira versão simples do algoritmo

```
def busca(lis,k):
  i=0
  while i<len(lis):
    if lis[i]==k:
      return i
    i=i+1
  return -1
print(busca([1,7,33,4,21,7],121))
```

Uma possível melhora no desempenho do algoritmo é conseguida mantendo a lista (ou o vetor) em ordem. Agora, a conclusão pela inexistência não precisa ir até o final da lista podendo parar no exato ponto em que a chave buscada deveria estar, se lá estivesse.

```
def busca(lis,k):
  lis.sort()
  i=0
  while i<len(lis)and lis[i]<=k:
    if lis[i]==k:
```

```
      return i
    i=i+1
  return -1
print(busca([1,17,33,4,21,7],14))
```

Repare que ao ordenar a lista acima, ela fica [1,4,7,17,21,33] e nela a busca pelo número 14, não precisa ir até o final, podendo parar ao encontrar o 21.

Outra estratégia é o uso de uma sentinela. Sentinela é um truque bastante usado em programação e ele faz analogia com o funcionário de uma empreiteira arrumando uma estrada. Ele sinaliza com uma bandeira alguma condição.

Aqui é igual: a sentinela é um valor qualquer que sinaliza alguma condição específica no algoritmo. Neste caso, a sentinela vai ser o valor $k$ que está sendo buscado. Este valor vai ser incluído no final da lista (Daí porque esta técnica não é usada com listas ordenadas). Agora, o valor $k$ vai ser encontrado por bem ou por mal, e este fato diminui um teste que não precisa mais ser feito. O ponto agora é onde o $k$ é encontrado: Se antes do final, ele já existia na lista e este fato pode ser reportado. Se o valor $k$ encontrado é aquele que acabamos de colocar no final da lista, então a conclusão é de que ele não existia anteriormente na lista.

Eis o algoritmo

```
def busca(lis,k):
  i=0
  lis.append(k)
  while lis[i]!=k:
    i=i+1
  if i==len(lis)-1:
    return -1
  return i
print(busca([1,17,33,4,21,7],21))
```

Até agora os custos associados a cada busca estão a seguir descritos. Considere-se o número de testes para localizar uma chave em um vetor de 1000 elementos (na média):

| método | custo | acessos para 1000 chaves |
|---|---|---|
| busca linear positiva | O(n) | 500*2 |
| busca linear negativa | O(n) | 1000*2 |
| busca ordenada positiva | O(n) | 500*3 |
| busca ordenada negativa | O(n) | 500*3 |
| busca sentinela positiva | O(n) | 500 |
| busca sentinela negativa | O(n) | 1000 |

Agora vai-se usar uma abordagem inovadora que é buscar um custo de busca de $O(1)$ muito mais rápido sob qualquer comparação que se faça.

A idéia é inventar uma função matemática qualquer que recebendo $k$ devolva a posição $i$ onde a chave estará (se $k \in V$) ou ela onde deveria estar. Busca-se o elemento indicado por $i$ e se ele for $k$ a busca foi bem sucedida. Se ele não for $k$ a busca foi mal sucedida. Em ambos os casos gasta-se $O(1)$.

Como não existe almoço grátis, esta estratégia impõe como exigência a impossibilidade de recuperar a lista na sua ordem original, além de um overload de carga de processamento para tratar as colisões.

Para discutir esta função de mapeamento (hash), é preciso estabelecer 2 conceitos:

- O espaço de chaves que representa todos os possíveis valores da chave $k$. Num exemplo hipotético, se estivermos falando do CPF como chave este espaço é de 000.000.000 a 999.999.999 ou 1 bilhão.

- O espaço de endereços que representa os espaços reservados no computador para guardar os dados. Numa universidade com 20.000 alunos este espaço poderia ser de 50.000.

Como tradicionalmente o espaço de chaves é sempre muito maior do que o espaço de endereços a função estudada precisa comprimir o primeiro no segundo. Neste processo de compressão pode ocorrer (e sempre ocorre) um fenômeno chamado **colisão**: duas chaves distintas geram o mesmo endereço na área de dados. Este fato precisa ser tratado e sempre impõe algum *overhead* ao processamento.

No nosso exemplo pedagógico vamos usar o CPF para acessar um espaço no qual será reservado espaço para 1000 pessoas. Para minimizar a ocorrência de colisões, vai-se aumentar o espaço para 5.000

Agora busca-se o primo mais próximo de 5000 para baixo que é 4.999. A nossa função de hash é

$$I = K mod 4999$$

A colisão será tratada de maneira bem simples, colocando-se o colidido em outra estrutura e indicando-se o ocorrido com a troca de sinal do valor no colisor. Acompanhe no código

```
import numpy as np
da=np.array(5000,int)
def fha(k):
  return k%4999
def inclusao(k):
  i=fha(k)
  if da[i]==0:
    da[i]=k
    return 0
  if da[i]==k:
    return i
  if da[i]<0:
    #...colisão a tratar...
    pass
def busca(k):
  i=fha(k)
  if da[i]==0:
    return -1
  if da[i]==k:
    return i
  if da[i]<0:
    #...colisão a tratar...
    pass
```

Completando a tabela de custos de acesso

| método | custo | acessos para 1000 chaves |
|---|---|---|
| tabela hash | O(1) | 1 |

Outra possibilidade de melhorar os custos de acesso está em usar a busca binária. Trata-se de processo similar ao que humanos usam ao buscar uma palavra em um dicionário. Claro, que neste caso está excluída a possibilidade de busca sequencial: a ninguém ocorrerá ler um dicionário sequencialmente até achar a palavra buscada.

A contrapartida a este método é que o vetor precisa ser guardado e mantido em ordem (aliás, tal como o dicionário). A idéia do método é buscar na metade do vetor qual chave existe. Se a chave buscada for menor que a chave do meio, a busca se concentrará na primeira metade do vetor (e a segunda metade é desprezada) ocorrendo o inverso se a chave buscada for maior do que a que está no meio. Com um único acesso, o tamanho do vetor caiu à metade. Prossegue-se neste método, com sucessivos cortes pela metade até localizar a chave buscada ou a garantia de que ela não está lá.

O custo desta busca com sucessivos cortes à metade é $\log_2 t$, onde $t$ é o tamanho do vetor. Se $t = 1.000$ o logaritmo é 10, o que significa que são necessários 10 acessos para buscar uma chave. Se $R = 1.000.000$ o logarirmo é 20.

Acompanhe o código

```
da=[1,5,7,23,45,67,68,69,80,83,90,100]
def busca(k):
  fim=len(da)-1
  ini=0
  while 1==1:
    met=(ini+fim)//2
    if k <= da[met]:
      fim=met-1
    else:
      ini=met+1
    if da[met]==k or ini>fim:
      break
  if da[met]==k:
    return met
  else:
    return -1
print(busca(51))
```

Atualizando a tabela

| método | custo | acessos para 1000 chaves |
|---|---|---|
| busca binária | $O(\log_2 t)$ | 10 |

Finalmente, a última busca que de alguma maneira resume todo este capítulo. Ela só perde para a tabela hash (mas em compensação não apresenta os problemas desta: permite processar o conjunto em ordem e não gera colisões) e a suprema qualidade é que não exige que os dados estejam em ordem. Na verdade, de uma maneira meio inesperada esta técnica tem melhor desempenho quanto mais DESORDENADOS os dados estiverem.

Trata-se da Árvore Binária de Busca. Antes de descrevê-la, vale a referência de que árvores são meio onipresentes na ciência da computação. O algoritmo de compressão de Huffman usa uma árvore, todos os índices de qualquer banco de dados usam árvores, corretores ortográficos usam árvores e por aí vai...

Uma árvore é uma estrutura hierárquica composta de nodos ao qual se associam diversos outros nodos (chamados de filhos do nodo original). Na árvore binária, o número máximo de filhos é 2. O único nodo que não possui pai, e que é o nodo iniciador da estrutura é chamado raiz da árvore. Curiosamente, na ciência da computação as árvores são desenhadas de ponta cabeça e daí que a raiz é o primeiro nodo, desenhado encima.

Árvores são estruturas ligadas. Neste tipo de estrutura misturam-se dados com endereços (ou ligações). Estas ligações é que são usadas para garantir eficiência na transversalidade dos dados. Em todos os métodos/estruturas vistos até agora, usavam-se estruturas sequenciais, nas quais os dados são contíguos o que permite sua busca sequencial.

A inexistência de um elemento ligado vai ser representada por um endereço (ligação) inválida ou neste caso valendo -1.

Nesta abordagem as ligações vão ser feitas usando-se cursores e não apontadores. Há uma pequena perda de desempenho no uso de cursores (representados pela dupla ligação que eles implicam) mas o ganho é substancial: todos os cursores ficam juntos e podem ser manuseados (e olhados) facilmente. O ganho sobretudo no *debugging* é enorme.

Na árvore binária de busca mais simples, cada nodo terá 3 valores: o valor da chave $k$, o endereço do filho esquerdo e o endereço do filho direito. Como usamos cursores a árvore vai ser mantida junta numa estrutura sequencial.

acompanhe a criação de uma árvore binária de busca (ABP) com as chaves 8, 17, 2, 21, 45 e 33 nesta ordem:
Inclusão do 8

| | | |
|---|---|---|
| 8 | -1 | -1 |

Inclusão do 17

| | | |
|---|---|---|
| 8 | -1 | 1 |
| 17 | -1 | -1 |

Inclusão do 2

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 |
| 17 | -1 | -1 |
| 2 | -1 | -1 |

Inclusão do 21

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 |
| 17 | -1 | 3 |
| 2 | -1 | -1 |
| 21 | -1 | -1 |

Inclusão do 45

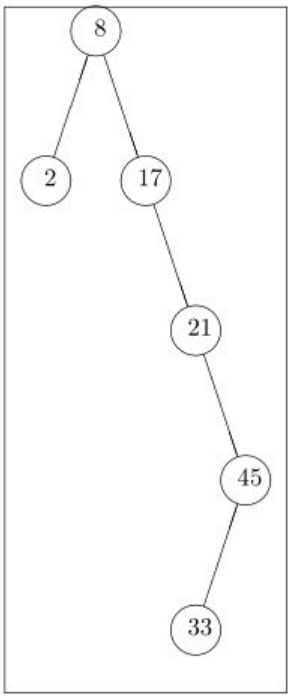
| | | |
|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 |
| 17 | -1 | 3 |
| 2 | -1 | -1 |
| 21 | -1 | 4 |
| 45 | -1 | -1 |

Inclusão do 33

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 2 | 1 |
| 17 | -1 | 3 |
| 2 | -1 | -1 |
| 21 | -1 | 4 |
| 45 | 5 | -1 |
| 33 | -1 | -1 |

Eis como ficaria desenhada esta árvore

 ©75-18, Pedro Kantek




Acompanhe o algoritmo

```
import numpy as np
abp=np.array([[8,2,1],[17,-1,3],[2,-1,-1],
     [21,-1,4],[45,5,-1],[33,-1,-1]])
def buscaabp(k):
  onde=0 # nodo raiz
  while onde != -1:
    anterior=onde
    if k<abp[onde][0]:
      onde=abp[onde][1]
    else:
      if k>abp[onde][0]:
 onde=abp[onde][2]
      else:
 return anterior
  return -1
print(buscaabp(8))
```

Atualizando a tabela

| método | custo | acessos para 1000 chaves |
|---|---|---|
| busca ABP | $O(\log_2 t)$ | 10 |

## 13.6 Primalidade

Define-se número primo como aquele inteiro que só é divisível pela unidade e por ele mesmo. $A$ é divisível por $B$ quando a divisão inteira de $A$ por $B$ deixa resto 0. Por exemplo, 5 é primo, pois seus únicos divisores são 1 e 5, enquanto 6 não é primo já que seus divisores são 1,2,3 e 6.

O contrário de um número primo é chamado número composto. Note-se que a unidade não é nem primo nem composto. Já o número 2 é o único primo que é par, já que todos os demais pares são divisíveis também por 2, logo compostos.

Uma característica interessante dos divisores de um número $n$ é que eles sempre aparecem em pares, sendo que o produto dos elementos deste par reproduz o número $n$ original. Esta regra só é quebrada quando $n$ é um quadrado perfeito, mas para reestabelecer a regra basta tomar a raiz duas vezes. Por exemplo, os divisores de 100 são 1,2,4,5,10,20,25,50,100 e para que a regra acima continuasse válida eles deveriam ser 1,2,4,5,10,**10**,20,25,50,100.

#### Serão infinitos os primos ?

Eis uma demonstração do fato, devida a Euclides (há várias outras demonstrações). Quer-se provar o Teorema que diz que os primos são infinitos. A demonstração é por *redução ao absurdo*. Então, suponhamos que existem $r$ números primos apenas, a saber: $p_1$, $p_2$,...,$p_r$.

Façamos o conjunto $P = \{p_1, p_2, ..., p_r\}$. Imagine o número $N$, definido por $N = p_1 \times p_2 \times ... \times p_r$, obviamente composto. Agora, faça $M = N + 1$. De cara, $M$ não é divisível por nenhum $p \in P$ pois o resto desta divisão é sempre 1.

Agora vamos especular sobre a natureza de $M$. Ele pode ser primo ou composto. Se for primo, achamos uma contradição (o "último" primo era $r$) e está demonstrado o teorema original. Se for composto, então existe um primo $p$ que não pertence ao conjunto $P$, pois se pertencesse, ele dividiria $N$ e também $M$ e ao fazê-lo, deveria também dividir a diferença $M - N$ [1], que como se sabe vale 1. Mas, não existe um primo que divida 1. Então, achou-se um novo primo $p$ que não pertence a $P$, uma contradição o que demonstra o teorema original.

**Distribuição dos números primos**

Os primos são infinitos, embora eles venham se tornando mais raros à medida em que cresce o limite superior da contagem. Por exemplo, entre 1 e 10 há 4 primos (40%), entre 1 e 100, há 25 (25%), entre 1 e 1000, há 168 (16%), entre 1 e 10.000, há 1.229 (12%), entre 1 e 100.000 há 9.529 (9%) e assim por diante.

A primeira descoberta na tentativa de entender a distribuição dos primos veio de Gauss, quando ele afirmou que o número de primos entre 1 e $N$ é aproximadamente igual a

$$\frac{N}{\log_e(N)}$$

O número real é um pouco menor do que isso.

A próxima etapa é o surgimento da função zeta, originalmente proposta nos tempos de Euler, cuja definição é

$$\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + ...\frac{1}{n^x} + ...$$

A origem do interesse dos matemáticos por esta soma infinita veio da música e tem origem numa descoberta dos gregos (Pitágoras) associando as oitavas da escala musical aos números 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,...

Os matemáticos sabem há muito tempo que ao substituir $x = 1$ na função $\zeta$, o resultado da soma, embora converja muito lentamente, tende a $\infty$. Números menores que 1, sempre convergem, eventualmente mais rapido, para infinito.

Euler, um dos maiores (senão o maior) torturadores de números da história resolveu estudar o que aconteceria se $x = 2$ na função $\zeta$. A função fica

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ...$$

e agora este número é menor, pois não inclui todas as parcelas de antes. A melhor estimativa era de $\frac{8}{5}$, mas Euler, *num dos cálculos mais intrigantes de toda a matemática (Satoy, 2004)* chegou a

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... = \frac{1}{6}\pi^2$$

Depois disso, Euler lembrou da descoberta grega de que qualquer número pode ser expresso como um produto de primos, e reescreveu $\zeta$ de outra maneira. Antes, veja-se a base do raciocínio $60 = 2\times2\times3\times5$ e daqui $\frac{1}{60} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times = (\frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$ e agora

$$\zeta(x) = (1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{4^x} + ...) \times (1 + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{9^x} + ...) \times ... \times (1 + \frac{1}{p^x} + \frac{1}{(p^2)^x} + ...) \times ...$$

Os gregos já haviam provado há 2000 anos que os números primos eram infinitos, mas a expressão acima apresentava nova prova do mesmo fato. Estamos por volta de 1850 em Göttingen, quando Dirichlet foi trabalhar nessa cidade, entusiasmado com a função $\zeta$. Lá já estava um aluno de Gauss, Riemann por sua vez entusiasmado com os números complexos de Cauchy. O pulo do gato agora foi dado por Riemann que foi introduzir números imaginários na função $\zeta$. Recém eleito para a Academia de Berlim, Riemann aproveitou o costume (novos associados deveriam apresentar um relato de suas pesquisas recentes) e em novembro de 1859 ele apresentou um artigo de 10 páginas sobre os números primos. Aqui Riemann herdou de seu professor Gauss (*pauca sed madura*) o costume de ao apresentar um bela construção retirar antes todos os andaimes e ferramentas usadas na construção. Quase perdido no texto está declarado o problema cuja solução hoje possui uma etiqueta de 1.000.000 de dólares: a hipótese de Riemann. Junto uma observação: *É claro que gostaríamos de ter uma prova rigorosa, mas deixei de lado essa busca após breves tentativas fracassadas, pois ela não é necessária para o objetivo imediato de minha investigação.* O principal objetivo do artigo em Berlim era confirmar que a função de Gauss fornecia uma aproximação cada vez melhor do número de primos à medida em que se atinge contagens cada vez mais elevadas. A recompensa por este artigo foi a cadeira universitária que Gauss havia ocupado e que a morte de Dirichlet deixara vaga.

Baseado no trabalho de Cauchy (funções podem ser representadas por equações) e estas desenhadas em um gráfico ele estudou o gráfico da função $\zeta$. O problema aqui é que os reais usam um eixo e a função o outro. Ao passar para complexos (que exigem 2 eixos para o número) são necessários 4 eixos: 2 para o número e mais dois para a função. A chave para pensar neste mundo é pensar na sombra: ela é a imagem bidimensional de algo que tem 3 dimensões. Em alguns ângulos ela fornece informação pobre, mas em outros isso muda: ao olhar o perfil de alguém eventualmente pode-se reconhecê-lo.

[1] Exemplo: se 2 divide 8 e 2 divide 26, então 2 deve dividir a diferença entre 26 e 8 que é 18. Mais um exemplo, se 3 divide 15 e 3 divide 60 então 3 deve dividir a diferença $60 - 15 = 45$

 ©75-18, Pedro Kantek

**Hipótese de Riemann**

No artigo de 1859, Riemann obteve a fórmula (exata) para $\pi(x)$, na qual aparecem 2 parcelas: primeiro uma excelente estimativa para $\pi(x)$ e depois uma subtração do erro cometido através de uma parcela de correção. Esta correção exige saber onde estão os zeros da equação $\zeta$. Há dois tipos de zeros: os triviais e os não triviais. Se $\Re(s) > 1$ então $\zeta(x) \neq 0$, isto é não há raizes nessa porção do plano complexo. Se $\Re(s) < 0$, a própria equação dá os zeros triviais. A afirmação de Riemann, feita em 1859 e que hoje vale 1 milhão de dólares diz que todos os zeros da função $\zeta$ se encontram sobre a reta $\Re(s) = \frac{1}{2}$. A validade deste resultado implica que não há surpresas no comportamento da sequência de primos, isto é que os primos têm padrão de regularidade e que não há surpresas lá adiante, onde a vista não alcança. Uma consequência prática importante deste estudo é a garantia de integridade do método RSA de criptografia na Internet.

A próxima questão é programar se dado um número $x$ ele é primo ou não. Vai-se usar esta tarefa para treinar a habilidade de refinamentos sucessivos na programação. Começando pela versão mais simples, derivada da definição de número primo.

```
def primo(x):
  d=2
  while d<x-1:
    if x%d==0:
      return False
    d=d+1
  return True
print(10,primo(10))
```

O próximo melhoramento é excluir o 2, depois os pares e depois crescer de 2 em 2. O desempenho cresce e o programa fica duas vezes mais rápido.

```
def primo(x):
  if x==2:
    return True
  if x%2==0:
    return False
  d=3
  while d<x-1:
    if x%d==0:
      return False
    d=d+2
  return True
print(11,primo(11))
print(12,primo(12))
```

A seguir, percebe-se que para detectar a primalidade, basta detectar um único fator, e da regra vista acima, sabe-se que eles vêm aos pares. Então a busca de fator pode parar ao se localizar a raiz quadrada do número. Fica

```
import math as mt
def primo(x):
  if x==2:
    return True
  if x%2==0:
    return False
  d=3
  while d<mt.sqrt(x):
    if x%d==0:
      return False
    d=d+2
  return True
print(11,primo(11))
```

Em resumo, um programa baseado no Crivo de Eratóstenes, pode ser assim obtido

1. Variar um divisor entre 2 e $n-1$. Examinar o resto em divisões sucessivas. Se alguma divisão deixar resto zero, $x$ é composto e sair. Ao final, concluir que $x$ é primo.

2. Lembrando que o único par primo é o 2, e excluindo-o da busca, concluir que se $n$ é par, $n$ é composto.

3. Outra melhoria é buscar a divisibilidade por 3, e neste caso, concluir que $n$ é composto.

4. Uma melhoria (a principal) é que como não se quer todos os divisores, (apenas um resolve o problema !), a busca pode se encerrar em $\sqrt{n}$ sem ser necessário chegar até $n$. Isto diminui sobremaneira a carga computacional do algoritmo.

5. Finalmente, os primos obedecem à regra $p = (6 \times x) \pm 1$, pelo que o passo na busca pode ser de 6 em 6. (Se não acreditar nesta regra, examine todos os primos entre 5 e 100...)

Note que esta última regra acelera o algoritmo, já que o passo do while afora é $f = f + 6$. Eis o algoritmo

```
import math
def primo(n):
  if n==1:
     return False
  if n<4:
    return True
  if n%2==0:
    return False
  if n<9:
    return True
  if n%3==0:
    return False
  r=math.floor(math.sqrt(n))
  f=5
  while f<=r:
    if (n%f)==0 or (n%(f+2))==0:
      return False
    f=f+6
  return True
```

De posse de qualquer uma dessas funções, pode-se sair inventando novas funcionalidades. Seja agora uma função que recebe $n$ e devolve o *n-ésimo* número primo. Obviamente, se a função *primo*$(x)$ já existe ela não vai ser reescrita apenas chamada. Eis como fica (o décimo número primo é 29).

```
def enesimop(n):
  can=2
  ctd=1
  while ctd<=n:
    if primo(can):
      ctd=ctd+1
    can=can+1
  return can-1
print("decimo",enesimop(10))
```

Seja agora o conceito de primo bom, que é Um número primo $P_n$ é dito primo bom se e somente se $P_n^2 > P_{n-1} \times P_{n+1}$ para qualquer $1 \leq i \leq n-1$

Por exemplo, 17 é um primo bom, já que: $17^2 = 289$ e $n = 7$ (ele é o sétimo número primo). Para ver se ele é bom mesmo, há que se fazer

$17^2 = 289 > P_6 \times P_8 \quad 13 \times 19 = 247$
$17^2 = 289 > P_5 \times P_9 \quad 11 \times 23 = 253$
$17^2 = 289 > P_4 \times P_{10} \quad 7 \times 29 = 203$
$17^2 = 289 > P_3 \times P_{11} \quad 5 \times 31 = 155$
$17^2 = 289 > P_2 \times P_{12} \quad 3 \times 37 = 111$
$17^2 = 289 > P_1 \times P_{13} \quad 2 \times 41 = 82$

Eis a programação de primo bom em C++

```
#include<iostream>
#include<cmath>
using namespace std;
   int primo(int x){
      //retorna 1 se x e primo e 0 senao
       int z,achei;
      achei = 1;
      z=2;
      if (x==2){
  return 1;
      }
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
      else {
      while ((z<(1+sqrt(x))) && (achei==1)) {
  if ((x%z)==0) {
      achei=0;
  }
  z++;
  }
  return achei;
      }
}

   int ordem(int x) {
      // retorna a ordem do numero primo x
      int me,md;
      me=1;
      md=2;
      while(md<=x) {
  if (primo(md)){
   me++;
  }
  md++;
      }
      return me-1;
   }

   int qual(int x) {
      // retorna o x-esimo numero primo
      int me,md;
      me=1;
      md=2;
      while(me<=x) {
  if (primo(md)){
   me++;
  }
  md++;
      }
return md-1;
   }

int main() {
   int n,g,incr,a;
   int quem;
   int resp;
   cin>>quem;

   if (primo(quem)==0){
      cout<<"nao e primo bom - nem e primo"<<endl;
   }
   cout<<"so e primo bom, se todos os r forem iguais a 1"<<endl;
   n=ordem(quem);
   cout<<"o numero dado "<<quem<<" e o primo de ordem "<<n<<endl;
   g=n;
   incr=1;
   while (n>1){
      a=(qual(g-incr))*(qual(g+incr));
      resp=(quem*quem)>a;
      cout<<(g-incr)<<" "<<(g+incr)<<" "<<(quem*quem)<<" "<<a<<" "<<resp<<endl;
      incr++;
      n--;
    }
}
```

## 13.7 Divisibilidade

Seja agora um conjunto de problemas sobre divisibilidade. Eis o problema 12 do magnífico site de matemática e programação projecteuler.net. Ele diz: A sequência dos números triangulares é gerada pela adição dos números naturais. Assim, o $7^o$ número triangular será $1+2+3+4+5+6+7=28$. Os primeiros 10 números triangulares são

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...$$

Vai-se listar aqui os divisores dos primeiros sete números triangulares:

**1:** 1

**3:** 1,3

**6:** 1,2,3,6

**10:** 1,2,5,10

**15:** 1,3,5,15

**21:** 1,3,7,21

**28:** 1,2,4,7,14,28

Pode-se ver que 28 é o primeiro número triangular que tem mais do que 5 divisores. Qual é o valor do primeiro número triangular que tem mais do que 500 divisores ?

#### Primeira estratégia

Sem pensar muito, pode-se resolver a questão usando a força bruta. Aqui, geram-se os números triangulares como descrito e depois acham-se todos seus divisores. A busca acaba quando se acha o primeiro com mais do que 500 divisores. (Uma informação: inteiros de 32 bits são suficientes para este problema). Uma solução em python:

```
t=1
a=1
cnt=0
while cnt <= 500:
   cnt=0
   a=a+1
   t=t+a
   i=1
   while i<=t:
      if t%i == 0:
  cnt=cnt+1
      i=i+1
print(t)
```

A implementação acima é muito demorada (estimei em umas 5h em uma CPU rápida)

#### Segunda estratégia

Uma melhora evidente é interromper a busca quando o divisor alcança a raiz quadrada do número triangular: Para cada divisor abaixo da raiz quadrada existe um acima dela. O código fica:

```
t=1
a=1
cnt=0
while cnt <= 500:
   cnt=0
   a=a+1
   t=t+a
   i=1
   ttx = sqrt(t)
   while i<=ttx:
      if t%i == 0:
  cnt=cnt+2
   if t=ttx*ttx:
      cnt=cnt-1 # correção quadrado perfeito
print(t)
```

Ainda assim, esta segunda estratégia continua muito demorada.

**Terceira estratégia**

Vamos nos socorrer de um pouco de matemática. Sabe-se que qualquer inteiro $N$ pode ser expresso de maneira única como

$$N = p_1^{a1} \times p_2^{a2} \times p_3^{a3} \times ...$$

onde $p_i$ é um número primo e $a_n$ seu expoente. Por exemplo, $28 = 2^2 \times 7^1$. Daqui, o número de divisores de $N$, $D(N)$ de qualquer inteiro pode ser computado como

$$D(N) = (a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times ...$$

onde os $a_n$ são os expoentes dos fatores primos que compõe o número $N$. No exemplo, os divisores de 28 são $D(28) = (2 + 1) \times (1 + 1) = 3 \times 2 = 6$. Uma tabela de primos é necessária para aplicar esta relação. Uma estratégia para criá-la pode ser (até 65500):

```
#def primo... já visto acima
def criatabprimos():
    pri=[2]
    i=1
    j=3
    while j<65500:
 if primo(j):
   pri.append(j)
   i=i+1
 j=j+2
    f=open("f:/p/.../primos.lis","w")
    f.write(str(a)[1:-1])
    f.close()
```

Depois, para ler essa tabela, usar:

```
def leiapri():
    f=open("f:/p/.../primos.lis","r")
    a=f.read()
    pri=list(map(int,a.split(", ")))
    print("feito")
```

Agora, o processamento

```
t=1
a=1
cnt=0
pri # lista de primos (acima...)
while cnt <= 500:
   cnt=1
   a=a+1
   t=t+a
   tt=t
   i=0
   while i < len(pri):
      if pri[i]*pri[i]>tt:
  cnt=cnt*2
  break
      expoente = 1
      while tt%pri[i]==0:
  expoente=expoente+1
  tt=tt//pri[i]
      if expoente>1:
  cnt=cnt*expoente
      if tt==1:
  break
      i=i+1
print(t)
```

**Quarta estratégia**

Ainda se pode melhorar mais, sabendo que os números triangulares também podem ser obtidos de acordo com

$$t = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

onde os componentes $n$ e $n+1$ são necessariamente co-primos (isto é, não têm qualquer fator primo comum nem divisor comum). Aqui, o número de divisores $D(t)$ pode ser obtido

$$D(t) = D(n/2) \times D(n+1) \; se \; n \; par$$

ou

$$D(t) = D(n) \times D((n+1)/2) \; se \; n+1 \; par$$

Cada componente é muito menor do que o número triangular. A tabela de primos também é muito menor (contém apenas primos menores do que 1000) Mais, o resultado do componente $n+1$ pode ser reaproveitado como $n$ no próximo número triangular, sem ser necessário recalculá-lo. Fica:

```
n=3
Dn=2
cnt=0
f=open("f:/p/.../primos.lis","r")
a=f.read()
prix=list(map(int,a.split(", ")))
pri=prix[0:168] # lista primos até 1000
while cnt <= 500:
  n = n+1
  n1 = n
  if n1 % 2 == 0:
    n1 = n1//2
  Dn1 = 1
  i=0
  while i<len(pri):
    if pri[i]*pri[i] > n1:
      Dn1=2*Dn1
      break
    exponent=1
    while n1 % pri[i] == 0:
       exponent=exponent+1
       n1 = n1//pri[i]
    if exponent > 1:
       Dn1=Dn1*exponent
    if n1 == 1:
       break
    i=i+1
  cnt = Dn*Dn1
  Dn = Dn1
print (int((n*(n-1)/2)))
```

Esta implementação demorou menos de $\frac{1}{10}$ de segundo na mesma CPU lá do começo. Se a minha estimativa inicial da primeira estratégia estiver certa (5h de CPU) a quarta estratégia é $5 \times 60 \times 60 \times 10 = 180.000$ vezes mais eficiente que a primeira.

Se este ganho de eficiência pudesse ser aplicado no preço de um Big-Mac, ele passaria de $20R\$$ para 0.01 centavos de real. Com uma moedinha de 10 centavos você poderia comprar 9 Big-Macs. Veja-se como vale a pena estudar algoritmos.

### 13.7.1 Números perfeitos, imperfeitos e mais que perfeitos

Esta é uma classificação que advém da soma dos divisores próprios de um determinado número (estes são todos os divisores à exceção do próprio número. Por exemplo os divisores próprios de 6 são 1, 2 e 3). Dada esta definição os números podem ser divididos em

**perfeitos:** São os números iguais à soma dos seus divisores próprios. Por exemplo 6 ou 28.

**imperfeitos:** São os números maiores do que a soma de seus divisores próprios. Por exemplo, 4 ou então qualquer número primo.

**mais do que perfeitos:** São os números menores do que a soma de seus divisores próprios. Por exemplo 60. Seus divisores são 1,2,3,4,5,6,10,12,15,20 e 30 que somados perfazem 108, e $108 > 60$.

Seja agora uma função que recebe $n$ e retorna 1,2 ou 3 em cada um dos 3 casos acima. Note que a codificação se inicia pela definição da função `sdpro(x)` que retorna a soma dos divisores próprios de um determinado número.

```
def sdpro(x):
  som=1
  for i in range(2,1+x//2):
    if x%i==0:
      som=som+i
  return som

def tiponum(x):
  s=sdpro(x)
  if x==s:
    return 1
  else:
    if x>s:
      return 2
  return 3
print(tiponum(28))
print(tiponum(4))
print(tiponum(60))
```

Ainda nessa seara, vamos estudar os números amigos: $a$ é amigo de $b$ se $a$ é igual a soma dos divisores próprios de $b$ e $b$ é amigo de $a$ se $b$ é igual à soma dos divisores próprios de $a$. E, eles são amigos entre si se um é amigo do outro. Vamos estudar o código que recebe dois números e responde `True` se eles são amigos e `False` senão.

```
def amigos(a,b):
  sa=sdpro(a)
  sb=sdpro(b)
  return a==sb and b==sa
print(amigos(220,284))
print(amigos(110,162))
```

## 13.8 Geometria analítica 140a, 902

Este é um capítulo que ganha importância a cada dia. Começando lá na França no século XVII, na genial descoberta de René Descartes, que embora seja lembrado como filósofo (*Penso, logo existo*, a frase conhecida por sua forma em latim *Cogito, ergo sum*, é uma frase do filósofo francês René Descartes. A frase original foi escrita em francês *Je pense, donc je suis* e está no livro Discurso do Método, de 1637) foi um fantástico matemático: dele obtemos a Geometria Analítica.

Trata-se do tratamento algébrico para questões geométricas (ou aqui a maravilha da coisa: o tratamento geométrico para questões algébricas). O pulo do gato está em pensar um ponto e dar-lhe coordenadas $x$ e $y$ em um plano (muito apropriadamente conhecido como plano cartesiano). As equações – álgebra – do ponto $x, y$ – geometria – dizem e fazem tudo. Contam os biógrafos que o tenente René Descartes estava deitado descansando em um acampamento militar, que não devia ser um lugar muito limpo, quando observou uma mosca andando sobre o teto do lugar. Ele pensou na mosca como um ponto e as laterais do teto como os eixos coordenados $x$ e $y$ e matutou em como especificar a mosca como funções de $x$ e de $y$: pronto. Acabava de nascer a Geometria Análitica ou – muito merecidamente – Geometria Cartesiana.

E, porque este assunto ganha importância hoje ? Por causa da georreferência e geolocalização que são a moda da hora. Vejam-se o GPS, o Uber, o aluguel de patinetes e os aplicativos de paquera, só para ficar em alguns exemplos, que

funcionam localizando uma pessos (a mosca do René) sobre o planeta Terra (teto do René) e daí medindo distâncias e roteiros.

A abundância de sistemas de apoio à geolocalização (o GPS americano, o Galileu europeu, o Glonass russo ou o chinês Beidou) aliado as inúmeras vantagens da georreferência faz com que esta funcionalidade esteja mais ou menos presente em todo sistema de informações do século XXI. Afinal, uma característica fixa e importante de qualquer coisa que ocupe lugar no espaço é sua localização.

No caso do planeta Terra, os dois eixos ortogonais são o equador e o meridiano de Greenwich (um observatória da Marinha Britânica perto de Londres). Se olharmos o planeta com o equador na horizontal e o polo norte acima, tem-se que pontos ao norte do Equador terão latitude positiva. Pontos ao sul do Equador, têm latitude negativa. Curitiba, por exemplo tem latitude -25$^o$, ou também 25$^o$ S.

O outro eixo, que seria o eixo das abcissas divide o planeta entre oriente (à direita, com valores negativos) e ocidente, à esquerda, com valores positivos. Curitiba têm longitude +49$^o$ ou mais apropriadamente 49$^o$ W.

A medida original era graus, minutos e segundos, mas a necessidade de maior precisão (como quebrar os segundos ? em décimos ?) fez com que todo o esquema fosse discutido e hoje é muito frequente a medida de graus e estes divididos em partes decimais ao infinito. Como exemplo, as duas maneiras de representar as coordenadas da cidade de Curitiba: Latitude: -25.4284, Longitude: -49.2733 ou em graus minutos e segundos: 25$^o$ 25 42 Sul, 49$^o$ 16 24 Oeste.

A seguir, algumas práticas:

1. **Área de retângulo:** Suponha que um retângulo é dado por 4 números: Os dois primeiros são as coordenadas $(X, Y)$ do canto superior esquerdo e os dois últimos são as coordenadas do canto inferior direito. Sabe-se que os lados do retângulo sempre serão paralelos aos eixos. Pergunta-se a seguir qual a área do retângulo. Relembrando, a área de um retângulo de lados $a$ e $b$ é o produto $a \times b$. Logo, o primeiro a descobrir é o comprimento de cada aresta. Assim, o retângulo 2,5,5,3 tem arestas de $5-3=2$ e de $5-2=3$. Logo a área é $2 \times 3 = 6$ ou área de 6 u.a. (unidades de área).

```
import numpy as np
import math
def ex1(p1,p2):
  return abs(p1[0]-p2[0])*abs(p1[1]-p2[1])

#print(ex1([2,5],[5,3]))
```

2. **Área de triângulo:** Suponha que um triângulo é dado por 3 pares de números. Cada par representa um dos pontos do triângulo. Neste problema, uma das arestas do triângulo sempre vai ser paralela a um dos eixos. Isso vai facilitar as coisas. A área de um triângulo é $T = \frac{b \times h}{2}$. Seja o exemplo: achar a área do triângulo 2,5; 2,-1; 8,1. Desenhando-o descobre-se que a base pode ser a aresta 2,5 a 2,-1, já que ela é paralela ao eixo $y$ e isto facilita o cálculo da altura que é $8-2=6$. Assim, a área é $(6 \times 6) \div 2 = 18$ u.a.

```
def ex2(a,b,c):
  x=np.zeros((3,3))
  x[0,0]=a[0]
  x[0,1]=a[1]
  x[0,2]=1
  x[1,0]=b[0]
  x[1,1]=b[1]
  x[1,2]=1
  x[2,0]=c[0]
  x[2,1]=c[1]
  x[2,2]=1
  w1=x[0,0]*x[1,1]*x[2,2]+x[0,1]*x[1,2]*x[2,0]+x[1,0]*x[2,1]*x[0,2]
  w2=x[2,0]*x[1,1]*x[0,2]+x[0,0]*x[1,2]*x[2,1]+x[1,0]*x[0,1]*x[2,2]
  if 1==abs(w1-w2)%2:
    return -1
  return (abs(w1-w2))/2
#print(ex2([2,5],[2,-1],[8,1])  )
```

3. **Área de um círculo:** Suponha que um círculo é dado por 2 pontos: seu centro e um ponto qualquer situado na circunferência do círculo. Voltando à geometria analítica, uma circunferência é dada por uma aplicação imediata do Teorema de Pitágoras, ou $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$, onde $(\alpha, \beta)$ são as coordenadas do centro e $R$ é o raio da circunferência. Neste caso, o que nos interessa é a fórmula da área de um círculo que é $C = \pi \times R^2$. Para o cálculo do raio, basta achar a distância entre o centro (dado) e um ponto qualquer (também dado). Usa-se o Teorema de Pitágoras, sempre ele. Eis um exemplo: seja o círculo dado por 0, -3, -6, -5; onde o centro é 0,-3 e um ponto qualquer da circunferência é -6,-5. A área do circulo é 125 u.a.

```
def ex3(a,b):
  r=(((a[0]-b[0])**2)+((a[1]-b[1])**2))**0.5
  return math.pi*r**2

#print(ex3([0,-3],[-6,-5]))
```

4. **O triângulo contém a origem ?:** Agora você vai receber um triângulo (3 pares de números) e deve dizer 1 para SIM ou 0 para NÃO se o triângulo contiver ou não a origem dos eixos. Em outras palavras, se o ponto (0,0) estiver dentro do triângulo, responda 1. Se o ponto (0,0) estiver fora do triângulo, responda 0. Por exemplo, seja o triângulo -6 6, -1 1 e -5 2. Tal triângulo não engloba a origem, logo a resposta é 0.

```
def ex4(a,b,c):
  tot=ex2(a,b,c)
  a1=ex2(a,[0,0],c)
  a2=ex2(a,b,[0,0])
  a3=ex2([0,0],b,c)
  if a1+a2+a3 != tot:
    return False
  else:
    return True
#print(ex4([-6,6],[-1,1],[-5,2]))
```

5. **Pontos por quadrante:** As regiões do plano delimitada pelos eixos são chamadas quadrantes. Há o primeiro, acima do eixo $x$ e à direita do eixo $y$, o segundo, (acima do $x$ e à esquerda do $y$), o terceiro (abaixo de $x$ e à esquerda de $y$) e finalmente o quarto quadrante que fica abaixo do $x$ e à direita do $y$. Neste exercício você vai receber 10 pontos e deve dizer quantos estão em cada um dos 4 quadrantes, somando esse resultado depois. Note que se um ponto está sobre um eixo, ele pertence aos dois quadrantes que são definidos pelo eixo em questão. Na situação limite, o ponto (0,0) pertence aos quatro quadrantes. Seja por exemplo, -3 -7, -4 -4, 0 -4, -6 8, 6 -7, -9 -3, 5 9, 0 0, 7 2 e -7 7. A resposta é 3,3,5,3 ou a sua soma 14.

```
def ex5(x):
  y=np.array(x)
  r=y.reshape((10,2))
  print(r)
  q1=q2=q3=q4=0
  for i in range(10):
    if r[i,0]>=0 and r[i,1]>=0:
      q1=q1+1
    if r[i,0]<=0 and r[i,1]>=0:
      q2=q2+1
    if r[i,0]<=0 and r[i,1]<=0:
      q3=q3+1
    if r[i,0]>=0 and r[i,1]<=0:
      q4=q4+1
  return q1+q2+q3+q4
#print(ex5([-3,-7,-4,-4,0,-4,-6,8,6,-7,-9,-3,-5,9,0,0,7,2,-7,7]))
```

6. **Qual o ponto mais distante da origem ?:** Neste exercício, você vai receber 5 pontos (pares) e deve dizer qual dos 5 pontos é o mais distante da origem. A solução está no Teorema de Pitágoras aplicado a cada ponto. Note que a distância em questão é a hipotenusa de um triângulo cujos lados estão sobre os eixos $x$ e $y$. Por exemplo, 5 -4, 1 2, 9 -7, -5 -9 e -3 8. Neste caso, o ponto mais distante é o 3 (ou seja 9 -7).

```
def ex6(x):
  y=np.array(x)
  r=y.reshape((5,2))
  dma=-9999999
  for i in range(5):
    d=((r[i,0]**2)+(r[i,1]**2))**0.5
    if d>dma:
      dma=d
      ima=i
  return ima+1
#print(ex6([5,-4,1,2,9,-7,-5,-9,-3,8]))
```

7. **Qual o ponto mais próximo ao mestre ?:** Dado um ponto mestre e 5 pontos acessórios, a pergunta agora é qual o ponto acessório que está mais perto do ponto mestre. É uma generalização do caso anterior (lá o mestre coincidia com a origem). O raciocínio é o mesmo, mas os lados do triângulo são dados pela subtração das coordenadas do acessório e do mestre, antes de usar o Teorema de Pitágoras. Seja o exemplo: Ponto mestre é -1 -9. Os pontos acessórios são 4 1, -6 -5, -4 8, 0 -7 e 7 5. O mais próximo é o ponto acessório 4 (ou 0 -7).

```
def ex7(x):
  y=np.array(x)
  r=y.reshape((6,2))
  dma=-9999999
  for i in range(1,6):
    d=(((r[i,0]-r[0,0])**2)+((r[i,1]-r[0,1])**2))**0.5
    if d>dma:
      dma=d
      ima=i
  return ima+1
#print(ex7([-1,-9,4,1,-6,-5,-4,8,0,-7,7,5]))
```

## 13.9 Dígitos Verificadores

**Algoritmos de Dígitos Verificadores**

| Erros possíveis em digitação | era | foi digitado |
|---|---|---|
| obliteração | 1234 | 123 |
| repetição | 1234 | 12234 |
| transposição | 1234 | 1324 |
| substituição | 1234 | 7234 |
| fraude | 1234 | 5678 |

O conceito de Dígito Verificador (DV) é usado para diminuir os erros de entrada de dados em sistemas computacionais. Pela utilização do DV, os códigos utilizados passam a ter uma lógica interna de funcionamento, o que permite determinar incorreções (inversões, obliterações, duplicações, invenção de códigos, etc) simplesmente "olhando" para o código sem necessidade de pesquisar em nenhuma entidade externa.

Pelo uso de um único DV, apenas um entre 10 códigos "inventados"estará correto e pelo uso de 2 DVs, apenas 1 em 100 estará correto.

Como se viu, pela simples análise do DV é possível detectar grande parte dos erros acima descritos.

A função mais usada é MOD, já que é uma função de mão única. (não tem inversa). Por exemplo DOBRO de 2 é 4. Logo A METADE de 4 é 2. Já 8 MOD 7 é 1. Mas não é possível determinar $x$ em X mod 7 = 1. $x$ pode ser 8, 22, 29,...

**Código de produtos - EAN13** Começou como UPC (código universal de produto, iniciativa americana de 12 dígitos que atribuia 6 dígitos para o fabricante, 5 para o produto mais o DV). Mais tarde o sistema evoluiu para uma iniciativa mundial, usando-se a codificação EAN-13, originalmente chamada European Article Number, atual International Article Number, mas que manteve a sigla. Nesta padronização, usam-se:

**país** os 3 primeiros dígitos indicam o país (789=Brasil, 784=Paraguai, 560=Portugal, etc)

**fabricante** os próximos 4, 5 ou 6 dígitos

**produto** os dígitos 5, 4 ou 3 seguintes

**dígito verificador** calculado sempre segundo o algoritmo:

- Some os códigos que ocupam posição MPAR
- Some os códigos que ocupam posição PAR e multiplique esta soma por 3
- Some as duas parcelas acima
- o dígito é quanto faltar para chegar a um múltiplo de 10

Observação: Se a soma já for múltipla de 10, o DV é zero.

Este código é gerado pela organização multinacional GS1 (www.gs1.org) com sede na Bélgica. Sua perna brasileira é a GS1 Brasil (www.gs1br.org) que nasceu como ABAC.

**ISBN 10 (International Standard Book Number)** O último dígito da série de 10 do ISBN é o DV. Ele é calculado de maneira a que multiplicando cada dígito do código pela sua posição (começando da direita e em 1) e somando tudo, o resto desta soma por 11 deve ser 0.

Acompanhe o exemplo: Seja o ISBN 85-7001-926-? (idioma-editor-livro-dv). Multiplica-se 8 por 10, 5 por 9, 7 por 8, 1 por 5, 9 por 4, 2 por 3, 6 por 2 e o resultado é 240.

Dividindo 240 por 11 tem-se 21.8, e portanto o próximo inteiro divisível por 11 é 11 vezes 22, que é 242.

Fazendo-se 242-240=2 que é o DV procurado.

O ISBN 13 (em uso a partir de Janeiro de 2007) gera seu dígito da mesma maneira que o EAN13.

**Códigos de cartão de crédito** Usa-se o algoritmo de Luhn.

O algoritmo de Luhn (Hans Peter Luhn, funcionário da IBM, 1896-1964), também conhecido como módulo 10, foi desenvolvido nos anos 60, como um método para validar códigos. Ele é usado nos números de cartão de crédito e no código de seguro social do Canadá. O algoritmo é de domínio público. Ele protege contra o erro acidental e não contra o ataque malicioso.

Para testar o algoritmo de Luhn, calcule o DV do cartão 4931 4701 2604 479?. A resposta deve ser 2.

Este algoritmo também é usado no sistema bancário da Noruega, no código ISSN (periódicos), no número de identificação do veículo em alguns estados americanos, no cartão de identificação de israelenses e no Yugoslav Unique Master Citizen Number (JMBG).

Os principais métodos usados:

**Módulo 10**

- Separe os dígitos do código a processar. Ex: se o código é 13865, tem-se $d_1 = 1$, $d_2 = 3$, $d_3 = 8$, $d_4 = 6$ e $d_5 = 5$.
- Crie um vetor de pesos P, com o mesmo número de dígitos, e contendo 2 e 1, começando com 2 e alternando. Ex: $p_1 = 2, p_2 = 1, p_3 = 2, p_4 = 1, p_5 = 2$.
- Multiplique os dois vetores, tirando NOVES FORA em cada multiplicação. Ex: $m_1 = 1 \times 2 = 2$, $m_2 = 3 \times 1 = 3$, $m_3 = 8 \times 2 = 16$, noves fora=7, $m_4 = 1 \times 6 = 6$, $m_5 = 2 \times 5 = 1$
- Some os elementos do vetor multiplicação. Ex:$2 + 3 + 7 + 6 + 1 = 19$
- O que faltar para completar a próxima dezena será o $DV$ *mod* 10. No exemplo, o que falta a 19 para completar 20 é 1. Logo $DV = 1$.
  Obs: 1: noves fora: se $x > 9$, $x \leftarrow x - 9$ ;
  2:se deu a dezena, a resposta é 0.

**Módulo 11**

- Separe os dígitos.
- Crie vetor P. O menor peso é 2, alocado ao dígito mais a direita. A seqüência de pesos cresce para a esquerda. Ex: $7, 6, 5, 4, 3, 2$. A lei de formação destes pesos PODE VARIAR em cada método.
- O $DV = 11-$ resto da soma dividido por 11.
- Se o resto é 0 ou 1, o DV é igual a 0. (No BB se R=0, DV=X)

O método da letra chave (em desuso) tem como resposta uma letra e não um dígito. Ao invés de divivir a soma por 11, divide por 26 e usa a correspondência de letras (0=A, 1=B, 2=C, ... , 25=Z). Foi usado na Receita do PR até 96.

**CPF (Cadastro de Pessoas Físicas)** a) São 2 DVs.
b) O primeiro é calculado pelo MOD 11, com pesos $= 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$.
c) O DV calculado é colocado no seu lugar e o processo refeito, agora com os pesos: $11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2$.
d) O segundo dígito é colocado no seu lugar.
Obs: O nono dígito de um CPF é a região onde foi criado. 6=MG, 7=ES/RJ, 8=SP, 9=PR/SC e 0=RS. Por exemplo, seja o $CPF = 176.294.338$, quais os DVs ? $1 \times 10 + 7 \times 9 + 6 \times 8 + 2 \times 7 + 9 \times 6 + 4 \times 5 + 3 \times 4 + 3 \times 3 + 8 \times 2 = 246$, cuja divisão por 11 tem como resto 4. Logo o primeiro DV é $11 - 4 = 7$.
Refazendo $1 \times 11 + 7 \times 10 + 6 \times 9 + 2 \times 8 + 9 \times 7 + 4 \times 6 + 3 \times 5 + 3 \times 4 + 8 \times 3 + 7 \times 2 = 303$,cujo resto da divisão por 11 é 6. Assim, o DV é $11 - 6 = 5$. O CPF completo fica sendo $176.294.338 - 75$.

Curiosidade: CPF = 111 111 111, DVs=1,1. CPF = 222 222 222 - 22, 333 333 333 - 33, 444 444 444 - 44, e assim por diante até 999 999 999 - 99 e 000 000 000 - 00.

**CNPJ (antigo CGC)** a) São 3 DVs.
b) O DV1 ocupa a 8.posição do código e é um Módulo 10 dos 7 dígitos iniciais.
c) O DV2 ocupa a 13.posição e é um Módulo 11 de todos os anteriores com o vetor de *pesos* = 543298765432. d) O DV3 ocupa a 14.posição e é um Módulo 11 de todos os anteriores com os *pesos* = 6543298765432.

Exemplo, seja o CNPJ da COPEL: 7 648 381. O $DV1 = 7 \times 2 = 14$, noves fora $= 5 + 6 \times 1 = 6$, $+4 \times 2 = 8$, $+8 \times 1 = 8$, $+3 \times 2 = 6$, $+8 \times 1 = 8$, $+1 \times 2 = 2$. A soma é 43, e o DV1 é o que falta para a próxima dezena, NESTE CASO 50, ou DV1=7. Com isso o primeiro código é: 76.483.817. Continuando:
A filial é 0001, e fica: 76.483.817/0001.

O DV2 é igual a: $= 7 \times 5 + 6 \times 4 + 4 \times 3 + 8 \times 2 + 3 \times 9 + 8 \times 8 + 1 \times 7 + 7 \times 6 + 0 \times 5 + 0 \times 4 + 0 \times 3 + 1 \times 2 = 229$. O DV2 é 11 menos o resto de 229 por 11 que é 2.

DV3=$7 \times 6 + 6 \times 5 + 4 \times 4 + 8 \times 3 + 3 \times 2 + 8 \times 9 + 1 \times 8 + 7 \times 7 + 0 \times 6 + 0 \times 5 + 0 \times 4 + 1 \times 3 + 2 \times 2 = 254$. O resto de 254 dividido por 11 é 1, logo o DV3=11-1=10 ou zero. Assim, o CNPJ completo da COPEL é: 76.483.817/0001-20.

Observação: Alguns CNPJs inexplicavelmente não seguem o aqui escrito. Aparentemente foram criados antes da regra. Por exemplo, o CGC da Light: 66 444 437/0001-46.

### Boleto Bancário

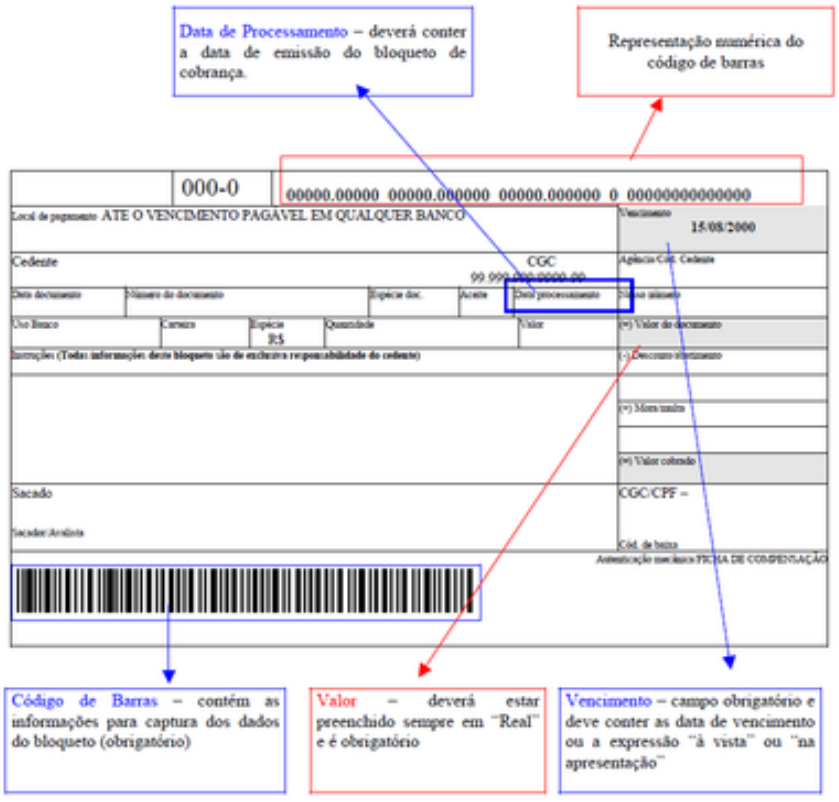
O sistema bancário brasileiro é muito eficiente. Resultado direto dos muitos anos em que convivemos com uma inflação renitente e da cultura brasileira de transfere aos bancos inúmeros procedimentos de cobrança aliado ao tamanho imenso de nosso país o resultado é um conjunto de bancos e de práticas eficientes e modernos.

Uma grande sacada foi a construção de um sistema integrado de cobrança através de um bloqueto padronizado. Por meio dele, qualquer agência bancária pode receber qualquer conta, não importa quem seja o emissor, já que o bloqueto é compensável. Antes deste sistema, consumidores precisavam fazer uma romaria pelos bancos, pagando a cada um as contas emitidas por ele. Agora, – pelo menos até o vencimento – todas as contas podem ser pagas em qualquer agência, possivelmente na agência onde o pagante tiver conta.

Existe uma norma do Banco Central do Brasil (Carta Circular 2926 de 25/07/2000) e uma orientação da FEBRABAN (Federação Brasileira de Bancos) que padroniza o bloqueto e elas vão ser resumidas aqui. Existe uma lista de informações que obrigatoriamente devem estar impressas no bloqueto e são:

- Local de pagamento;
- Data de vencimento;
- Cedente (nome) - quem vai receber o dinheiro;
- Agência/Código do cedente - onde;
- Data do processamento - quando o boleto foi processado/impresso;
- Nosso número - como o cedente vai identificar o que/quem pagou;
- Valor do documento;
- Sacado (nome e endereço completo) - quem deve pagar.

Eis uma imagem do bloqueto com algumas orientações




 ©75-18, Pedro Kantek

A parte que é capturada no pagamento é formada pelas seguintes informações:

| tamanho | conteúdo |
|---|---|
| 3 | identificação do banco (BBB) |
| 1 | moeda (9=real) (M) |
| 4 | fator de vencimento (1000=3/7/2000) (FFFF) |
| 10 | valor (incluídas 2 decimais) (VVVVVVVVVV) |
| 25 | campo livre para identificar o pagamento (LL..LL) |
| 1 | DV calculado pelo módulo 11 (D) |

O campo livre é formado por:

| | |
|---|---|
| 4 | agência do cedente (sem DV) |
| 2 | código da carteira |
| 11 | nosso número |
| 7 | conta corrente do cedente |
| 1 | fixo igual a zero |

Estas informações estão dispostas em 2 lugares: no alto do bloqueto em dígitos decimais prontos para serem digitados e também na parte inferior do bloqueto na forma de código de barras prontos para captura automatizada.

É importante notar que:

- As duas séries de dados não estão na mesma ordem
- O campo numérico possui 3 dígitos verificadores adicionais que são altamente recomendados para evitar erros de digitação.

A linha digitável tem a seguinte estrutura:

| tamanho | conteúdo |
|---|---|
| 3 | banco |
| 1 | moeda |
| 5 | posições 1-5 do campo livre |
| 1 | DV1 (módulo 10) das 9 posições anteriores |
| 10 | posições 6-15 do campo livre |
| 1 | DV2 (módulo 10) das 10 posições anteriores |
| 10 | posições 16-25 do campo livre |
| 1 | DV3 (módulo 10) das 10 posições anteriores |
| 1 | DV geral (módulo 11) |
| 4 | fator de vencimento |
| 10 | valor (com 2 decimais incluídas) |

O fator de vencimento é o número de dias transcorridos desde 07/10/1997 (na verdade desde 03/07/2000 - 1000d). Existe uma limitação aqui, já que esta numeração só aguenta até 21/02/2025. A conta dos 1000 dias é necessária já que quando a primeira posição do fator de vencimento é igual a zero, isso significa que o vencimento é "contra apresentação". Eis algumas datas e seus fatores de vencimento:

| fator | vencimento |
|---|---|
| 1000 | 03/07/2000 |
| 1002 | 05/07/2000 |
| 1667 | 01/05/2002 |
| 4789 | 17/11/2010 |
| 9999 | 21/02/2025 |

O cálculo do DV: Dispõe-se os dados do bloqueto como segue

```
BBBMFFFFVVVVVVVVVVLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL
```

e multiplica-se cada dígito por

```
4329876543298765432987654329876543298765432
```

Soma-se tudo e divide-se por 11, obtendo um resto. O DV é 11 menos o resto calculado, notando-se que o DV=1 para os restos 0, 10 ou 1. O DV é colocado na posição 5 do código de barras e no quarto campo (logo antes do fator de vencimento) na linha digitável.

O cálculo dos DVs parciais: Multiplica-se os dígitos do campo pela série 2,1,2,... começando pela direita com o valor 2. Antes de somar, deve-se aplicar a regra do "noves fora" (valores maiores do que 9 devem perder 9). Ou dito de outra maneira, somas com 2 dígitos devem ser substituídos pela soma dos 2 dígitos. Seja como for, no final, soma-se tudo. O DV é quanto falta para a próxima dezena inteira.

**Exemplos**

```
DV='34194897000004450017500000564138355700070000'
 é 8
```

```
DV='059725578998338320406689183962642336508247'
 é 3
DV='304042776831780789165422074364974541796755 3'
 é 9
DV1='341917500' é 9
DV2='0005641383' é 4 e
DV3='5570007000' é 0
DV2='6361840992' é 2
DV1='405100184' é 2
```

Uma solução bem simples

```
def cpf(x):
  z=x[8]*2+x[7]*3+x[6]*4+x[5]*5+x[4]*6+x[3]*7+x[2]*8+x[1]*9+x[0]*10
  y=11-(z%11)
  if y == 10 or y == 11:
    d1 = 0
  else:
    d1 = y
  z=d1*2+x[8]*3+x[7]*4+x[6]*5+x[5]*6+x[4]*7+x[3]*8+x[2]*9+x[1]*10+x[0]*11
  y=11-(z%11)
  if y == 10 or y == 11:
    d2 = 0
  else:
    d2 = y
  return([d1,d2])
  # para chamar faça: aa=cpf([1,1,1,2,2,2,3,3,3])
```

Uma solução um pouco mais compacta e sofisticada (atenção: é um script apenas)

```
c=[2,5,3,0,1,3,0,6,9]
p=[10,9,8,7,6,5,4,3,2]
s=0
for i in range(9):
  s=s+(c[i]*p[i])
d=11-(s%11)
if d == 10 or d==11:
  d=0
c=c+[d] #pode ser c.append(d)
p=[11]+p
s=0
for i in range(10):
  s=s+(c[i]*p[i])
d2=11-(s%11)
if d2 == 10 or d2==11:
  d2=0
print([d,d2])
```

## 13.10 Calendários

Os calendários antigos tinham que conciliar 2 ciclos: o da lua e do sol. O da lua deu origem ao meses e o do sol aos anos. O problema é que um não é múltiplo do outro.

O ano solar médio tem a duração de aproximadamente 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos (365,2422 dias). O Mês lunar em média, dura 29,5 dias.

Notem-se as frações a seguir (o número certo é 365,242199):

$$365,2425 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$$

$$365,242197 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{1}{3300}$$

Note-se que a semana é o único ciclo que não tem a ver com a natureza e sim com a religião (é o sétimo dia, onde Deus descansou após a criação do mundo). Aliás no português essa história de Segunda, Terça, ... deriva do antigo hebreu quando só o sabath era nomeado e os demais eram numerados.

Em 45 AC, Julio Cezar criou o que se chamou: Calendário Juliano (365d + 1bissex/4 anos)

**Janeiro** em homenagem a Janius, deus romano que cuidava das portas e das janelas

**Fevereiro** em homeganem às Februas (festival de purificação)

**Março** em homenagem a Marte deus da guerra

**Abril** não há consenso, mas historiadores acham que deriva de apripe (latim antigo = abrir) as flores

**Maio** maiores mês dos velhos

**Junho** juniores mês dos jovens

**Quintilio**

**Sextilio**

**Setembro** septilio

**Outubro** outilio

**Novembro** novitilio

**Dezembro** decitilio

Julio Cezar resolveu mudar o quintílio para Julho, e depois dele, Cezar Augusto, mudou o sextílio para Agosto.
os bispos reunidos no Primeiro Concílio de Nicéia, realizado em 325 determinaram que a Páscoa ocorreria sempre:

- num domingo
- depois da primeira lua cheia que
- se seguisse ao equinócio de primavera. (o sol sobre o equador)

O ano juliano tinha 11 min e 14 Seg a mais que o ano solar.
Em 1582, por conta das diferenças nas festas religiosas das diversas igrejas cristãs espalhadas pelo mundo, o papa Gregório XIII encomendou uma reforma no calendário e sumiram 10 dias de março. Dos anos terminados em 00 só os divisíveis por 400 seriam bissextos Demorou cerca de 250 anos a adoção deste calendário. Na inglaterra só foi adotado em 1752, e daí passou-se de 2 a 14 de setembro.

#### calendário republicano francês

Em 1793, após a Revolução Francesa, houve a proposta do calendário republicano. 12m x 30d e os últimos 5 dias do ano seriam feriados nacionais. Os meses tinham nomes poéticos: germinal, floral, thermidor, fructidor, brumaire...). Este calendário durou pouco, foi abolido por Napoleão em 1805.

## PROPOSTAS NOVO CALENDÁRIO

- Da ONU, aprovada em 1954. O ano é de 52 semanas e 364 dias. O dia 365 é no final do ano, (DIA DE FIM DE ANO) não tem número nem nome na semana. Nos anos bissextos este dia cai após a 26ª semana. O primeiro mês do quadrimestre tem 31 dias e os demais tem 30.
- Calendário Internacional Fixo. 13 meses de 28 dias, mais 1 dia que não pertence a nada no fim do ano. O dia do bissexto vem após 28 junho. A vantagem é que as segundas sempre são dias 1, 8, 15 e 22. O novo mês é o mês SOL entre junho e julho.
- Calendário do congresso americano => orientado a business Finalmente, há uma nova proposta de estabelecer um tempo mundial, (desvinculado do sol), orientado a negócios e com divisões decimais. Aos poucos é este sistema que vai sendo implementado subrepticiamente. Por exemplo, no tráfego aéreo mundial.

#### Caso prático: Calendários

Em 1347 a peste negra devastou a Europa. Esta doença é na verdade uma pneumonia que causa bubões (inchaços nas axilas e virilhas), sendo também chamada de peste bubônica. Os bubões eram caldos de cultura da bactéria causadora, que também era transmitida por pulgas dos ratos. O nome negra, vem do fato de que (supostamente) a carne das vítimas enegrecia pouco antes da morte. A história começa quando uma tribo Mogol de nome Kipchak resolve atacar um posto comercial genovês no Mar Negro. Usaram para isso uma das primeiras armas biológicas que a história registra: cadáveres humanos contaminados com a doença eram atirados através de catapultas para dentro da cidade. Esta embora armada e provisionada para resistir ao cerco, ao ver-se impotente para enfrentar esta arma resolveu fugir de navio de volta a Gênova, abandonando o posto comercial. Junto com eles, foi a doença. Durante os 4 anos seguintes a peste foi para a Sicília, África, Itália, Espanha, França, Inglaterra e depois toda a Europa. Vinte e cinco milhões de pessoas, um quarto

da população européia, morreram. Dois séculos passariam antes que a população retornasse ao número de 100 milhões. A devastação da peste negra encerrou um ciclo na história da humanidade. Levantes sociais e políticos espoucaram, a mão de obra escasseou, o campo foi abandonado, os alimentos rarearam. Até aqui, o universo era governado por regras estabelecidas por duas autoridades: Aristóteles (384-322 aC) e o egípcio Cláudio Ptolomeu (100-170 dC). No milênio anterior, a Igreja havia mesclado essas regras à sua visão de mundo, resultando um bloco homogêneo: Deus havia criado a Terra no centro do Universo. Estrelas e planetas giravam em órbitas circulares em volta da terra. Oito esferas concêntricas feitas de material imutável e eterno continham a Lua, o Sol, Marte, Mercúrio, Júpiter, Vênus e Saturno. A última esfera continha as estrelas. Apenas na terra a matéria se decompunha e morria. Nas esferas tudo era eterno. Veja-se o reflexo disso nos nomes dos dias de semana, nos principais idiomas ocidentais:

| Corpo Celeste | Inglês | Francês | Italiano | Espanhol |
|---|---|---|---|---|
| Sol | Sunday | dimanche | domenica | domingo |
| Lua | Monday | lundi | lunedi | lunes |
| Marte | Tuesday | mardi | martedi | martes |
| Mercúrio | Wednesday | mercredi | mercoledi | miércoles |
| Júpiter | Thursday | jeudi | giovedi | jueves |
| Vênus | Friday | vendredi | venerdi | viernes |
| Saturno | Saturday | samedi | sabato | sábado |

A reação à peste foi um novo cenário que buscou enterrar e esquecer aquele o mais rápido possível: a renascença. A Itália, pela localização central iniciou o movimento do comércio entre oriente e ocidente. Nasceram aqui os primeiros sistemas administrativos, o conhecimento financeiro e os bancos. A ciência (a matemática) começou a ser usada: na arquitetura, no comércio, na cartografia. Sabemos hoje que a Terra demora 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos para uma volta completa ao redor do sol. Egípcios haviam estimado este valor em 365,25 dias (ou seja 365 dias e 6 horas. Ficou uma diferença de 11 minutos e 14 segundos). Com a adoção do calendário egípcio por Júlio Cézar no século I dC, esta disparidade foi se acumulando ano após ano, afastando as datas do calendário das estações. Em meados do século XV ja havia dez dias de atraso. Em 1475 o papa Sisto IV pedira um estudo para determinar a causa do erro. Não houve quem conseguisse compatibilizar Aristóteles e Ptolomeu com o calendário. Podiam garantir estabilidade política, mas estavam cada vez mais incapazes de calcular a data da Páscoa corretamente.

Copérnico (1473-1543) começou a desenvolver em 1506 um sistema astronômico baseado em suas próprias observações e cálculos. Na tentativa de tirar a Terra do centro do universo e colocar aí o Sol, a dificuldade era explicar como as coisas não "caíam"em direção ao sol. Achava-se na época, que a matéria era naturalmente atraída para o centro do universo (embaixo da terra). Quando recrutado pelo secretário do papa, em 1514 para resolver o problema do calendário, Copérnico viu-se num dilema: ou reafirmava a teoria que a vaidade, o medo e a Bíblia haviam montado (estamos no centro do universo) e não resolvia o problema, ou chutava o pau da barraca para propor um novo calendário.

Ele, que bobo não era, recusou o convite, embora continuando a estudar o problema em segredo. Convencido pela correção de seus cálculos e encorajado por amigos, esboçou um rascunho de suas idéias em 1530. Este escrito provocou reações mistas. Finalmente, em 1543, autorizou a publicação de *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, comumentemente conhecido como As Revoluções. Copérnico recebeu o primeiro exemplar em 24 de maio de 1543 e morreu poucas horas depois.

O próximo personagem desta história é Galileu Galilei. Pulamos Giordano Bruno, queimado na fogueira no Campo di Fiori em 17 de fevereiro de 1600. Galileu teria deixado cair duas bolas de pesos diferentes da Torre de Pisa para provar que ambas chegariam juntas, contrariando Aristóteles que afirmara chegar a mais pesada antes. Há dúvidas se isso de fato ocorreu. Mais modernamente supõe-se que tenha sido uma experiência intelectual apenas. O argumento intelectual é notável[2]Este é o melhor jeito de fazer física, à la Einstein...

Galileu freqüentou diversas universidades na Itália, sempre conflitando com os demais professores. Escreveu inúmeros livros, "inventou" o telescópio [3] Ao usar os telescópios, viu quatro satélites orbitando Júpiter e os anéis de Saturno e relatou isso no livro *Sidereus Nuncius*(O Mensageiro Celeste). Escreveu de leve, ainda sem adotar completamente o modelo copernicano. A Igreja já começou a enviar mensagens de que não concordava com as idéias desse livro. Em 21 de dezembro de 1614, o padre Tomás Caccini, em Florença criticou Galileu aformando que se Deus parou o sol a pedido de Josué para que os israelitas derrotassem os amoritas, como o sol poderia ser o centro do universo ? O padre foi mais longe: acusou Galileu, a matemática e todos os matemáticos de hereges políticos e religiosos. A defesa de Galileu é perfeita:

> Não me sinto na obrigação de acreditar que o mesmo Deus que nos dotou de sentidos, razão e intelecto, tencionava descartar o uso destes e por algum outro meio nos dar o conhecimento que com eles podemos obter [...] A intenção do Espírito Santo é ensinar-nos como se vai para o céu e não como o céu funciona.

Em 5 de março de 1616 o cardeal Belarmino da Santa Inquisição decretou que o sistema copernicano era "falso e errôneo" afirmando que Deus fixou a Terra em seus alicerces para jamais ser movida. Galileu nunca se conformou com este decreto, buscando incessantemente a sua revogação. Em 1624, obteve do papa uma autorização para escrever seu

[2]Suponha jogar as 2 bolas e suponha que Aristóteles estava certo: a mais pesada chega antes. Agora suponha as mesmas duas bolas porém ligadas por fio. Por um lado pode-se argumentar que a mais leve "segura" a mais pesada e esta demora mais a chegar. Por outro lado, pode-se supor que o fio transforma as duas massas em uma só, que passa a ser mais pesada que a bola anterior. O resultado é que agora as bolas chegam antes do que chegavam. Para que ambos os raciocínios estejam certos e estão, a única possibilidade é elas chegarem juntas.

[3]Ele é assim considerado pois construiu os maiores telescópios em uso na Europa, ultrapassando seus modelos anteriores por diversas vezes.

 ©75-18, Pedro Kantek

livro mais famoso *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo*, que foi publicado em 1632 e recebido com louvores por acadêmicos de toda a Europa. Pouco depois, foi acusado pela inquisição de herege. Não pode ver as acusações ou as provas. Ficou no dilema: ou se retratava ou morria como Giordano Bruno. Em decisão que alguns criticaram como prejudicial a ciência, ele resolveu pela vida. Em 22 de junho de 1633, fez uma longa retratação. Diz a lenda que depois de terminada a leitura, ao se erguer da posição de joelhos onde estava,Galileu teria dito *"E pur, si muove"* . Só em 1757 a Igreja retirou a proibição sobre a obra. Em 1992, o papa João Paulo II reconheceu formalmente o erro da Igreja.

Depois vem Isaac Newton, um dos 5 maiores cientistas que a Humanidade produziu (decomposição da luz, cálculo diferencial e integral, gravitação entre outros). Ao escrever sobre a lei universal da gravitação, ele acabou de consolidar o modelo copernicano, que já havia sido engordado com as leis de Kepler sobre o deslocamento dos planetas.

### Calendários Juliano e Ptolomeico

A encrenca do calendário está em que ele lida com 3 ciclos distintos: solar: Alterna as estações e depende do sol. Mede os anos; lunar: Alterna as luas (cheia, nova ...) e depende da lua. Mede os meses; semanal: Mede os dias da semana e tem origem religiosa. Indica o sabath.

A dificuldade e que estes 3 ciclos não são múltiplos entre si.

Em 45 aC, Júlio Cezar criou o calendário juliano, baseado no ptolomeico. Neste o ano tinha 365d e um quarto de dia. Os meses foram batizados de Janius (portas e janelas), Februas (festa da purificação), Mars (guerra), Apripe (abertura das flores), Maiores, Juniores, Quintílio, Sextílio, Septílio, Octílio, Novitílio e Decitílio. Logo depois, o próprio JC mudou o nome do Quintílio para Julius. Seu sucessor, Cezar Augusto não deixou por menos, mudando o próximo para Augustus.

Em 1582, o papa Gregório mudou o calendário, que com a reforma passou a ser conhecido como calendário gregoriano. Sumiram 10 dias em março desse ano. Adotou-se a regra dos anos bissextos. A adoção deste calendário demorou. Na Inglaterra ele só foi aceito em 1752. Em 1793, a Revolução Francesa mudou novamente o calendário. Nele há 12 meses de 30 dias e 5 feriados nacionais. Os meses: germinal, floral, thermidor, fructidor, brumaire. Napoleão o aboliu em 1805.

### Regra do bissexto

Sejam R4 $\leftarrow$ resto da divisão do ano por 4; R100 $\leftarrow$ resto da divisão do ano por 100 e R400 $\leftarrow$ resto da divisão do ano por 400.

SE R4=0 $\wedge$ ((R100 $\neq$ 0) $\vee$ (R400 = 0)) o ano é bissexto senão não é.

Observação: o tema calendários está tratado no livro de algoritmos.

## Calendário Republicano Francês

Os anos sempre começavam no equinócio do outono. Tinha 12 meses de 30 dias cada. Cada mês se divide em 3 décadas de 10 dias. Desaparecem as semanas. Os nomes dos meses adotam fenômenos naturais ou agrícolas: Outono (nome terminado em aire) Vendémiaire, (vendimiário), a partir do 22, 23 ou 24 de setembro Brumaire, (brumário), a partir do 22, 23 ou 24 de outubro Frimaire, do francês frima (geada), a partir do 21, 22 ou 23 de novembro

Inverno (terminado em -ôse): Nivôse (nevoso), a partir do 21, 22 ou 23 de dezembro Pluviôse (chuvoso), a partir do 20, 21 ou 22 de janeiro Ventôse (ventoso), a partir do 19, 20 ou 21 de fevereiro

Primavera (terminado -al): Germinal (semeal, de semear), a partir de 20 ou 21 de março Floréal (floral), a partir de 20 ou 21 de abril Prairial (praderal), a partir de 20 ou 21 de maio

Verão (terminado em -idor): Messidor (messe, colheita), a partir de 19 ou 20 de junho Thermidor (calor), a partir de 19 ou 20 de julho Fructidor (frutador), a partir de 18 ou 19 de agosto

As décadas são : primidi, duodi, tridi, quartidi, quintidi, sextidi, septidi, octidi, nonidi, décadi.

Os 5 dias sobrantes (6 em anos bissextos) aparecem no fim do ano. No começo eram conhecidos como *Sans-culottides*, mas depois viraram festas:

Fête de la Vertu "Festa da Virtude"dia 17 ou 18 de setembro Fête du Génie "Festa do Talento"no 18 ou 19 de setembro Fête du Travail "Festa do Trabalho"dia 19 ou 20 de setembro Fête de l'Opinion "Festa da Opinião"dia 20 ou 21 de setembro Fête des Récompenses "Festa das Recompensas"no 21 ou 22 de septembro Fête de la Révolution "Festa da Revolução"dia 22 ou 23 de setembro (em anos bissextos)

Os dias do ano Em vez de um santo (como no calendário católico), cada dia ganha um nome (planta, animal ou ferramenta). Há uma lista de todos os dias, dos quais retirei algumas datas:
26/09 - dia do cavalo (cheval)
06/10 - dia do asno (âne)
19/12 - dia da oliva
25/12 - dia do cachorro (chien)
14/01 - dia do gato (chat)
12/04 - dia da castanheira (marronnier)
04/07 - dia do tabaco (tabac)
...
A seguir, um script bem simples para achar o dia da semana

```
import math
dia=16
mes=4
ano=1722
A=math.floor((12-mes)/10)
B=ano-A
C=mes+(12*A)
D=math.floor(B/100)
E=math.floor(D/4)
F=E+2-D
G=math.floor(365.25*B)
H=math.floor(30.6001*(C+1))
I=F+G+H+dia+5
R=I%7
print(R)
```

Para achar a Páscoa de um ano qualquer

```
import math
ano=2016
A=ano%19
B=math.floor(ano/100)
C=ano%100
D=math.floor(B/4)
E=B%4
F=math.floor((B+8)/25)
G=math.floor((1+B-F)/3)
H=((19*A)+B+15-(D+G))%30
I=math.floor(C/4)
K=C%4
L=(32+(2*E)+(2*I)-(H+K))%7
M=math.floor((A+(11*H)+(22*L))/451)
P=math.floor((H+L+114-(7*M))/31)
Q=(H+L+114-(7*M))%31
print(Q+1,P)
```

Finalmente, um código completo:

```
import numpy as np
def semana(dia,mes,ano):
    a=(12-mes)//10
    b=ano-a
    c=mes+(12*a)
    d=b//100
    e=d//4
    f=e+2-d
    g=np.floor(365.25*b)
    h=np.floor(30.6001*(c+1))
    i=f+g+h+dia+5
    r=i%7
    return r
def bissexto(ano):
    r4=ano%4
    r100=ano%100
    r400=ano%400
    if ((r4==0) and ((r100 !=0) or (r400==0))):
 return True
    else:
 return False
def pascoa(ano):
    dm=[31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31]
    dp=[0]*12;
    a=ano%19
    b=ano//100
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
    c=ano%100
    d=b//4
    e=b%4
    f=(b+8)//25
    g=(1+b-f)//3
    h=((19*a)+b+15-(d+g)) % 30
    i=c//4
    k=c % 4
    l=(32+(2*e)+(2*i)-(h+k)) % 7
    m=((a+(11*h)+(22*l))//451)
    p=((h+l+114-(7*m))//31)
    q=(h+l+114-(7*m)) % 31
    print ("pascoa ", (q+1),p)
    if (bissexto(ano)==1):
 dm[1]=29;
    soma=0
    i=1
    while i<12:
 dp[i]=dp[i-1]+dm[i-1]
 i=i+1
    ordi=dp[p-1]+q+1
    carna=ordi-47
    ss=ordi-2
    cc=ordi+60
    c=ordi+60;
    i=0
    while dp[i]<carna:
       i=i+1
    print("terca de carnaval ",(carna-dp[i-1]),i )
    i=0
    while dp[i]<ss:
       i=i+1
    print("sexta santa ", (ss-dp[i-1]), i)
    i=0
    while dp[i]<cc:
 i=i+1
    print("Corpus Christi ",(cc-dp[i-1]),i )

pascoa(2019)
```

## 13.11 Diagonais, treliças ... (035c)

### Exponenciação eficiente

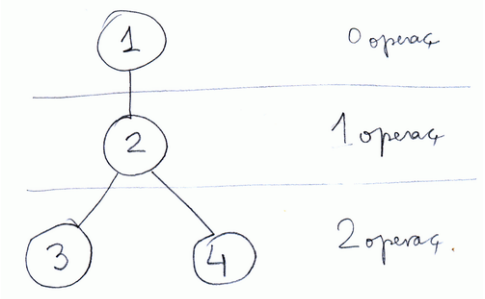
Problema retirado do maravilhoso `eulerproject.net` onde é o problema 122. Para calcular $x^n$, deve-se começar com $n = 1$. Aqui não há o que fazer e a resposta está calculada, pelo que o número de operações é zero.

Depois, $n = 2$. Também não há o que pensar. Tem-se que fazer $x \times x$. O número de operações é 1.

Quando $n = 3$, deve-se calcular primeiro $n^2$ (1 operação) e depois multiplicar este por $n$. Total 2 operações.

Quando $n = 4$, deve-se calcular primeiro $n^2$ (1 operação) e depois multiplicar este por ele mesmo. Total 2 operações.

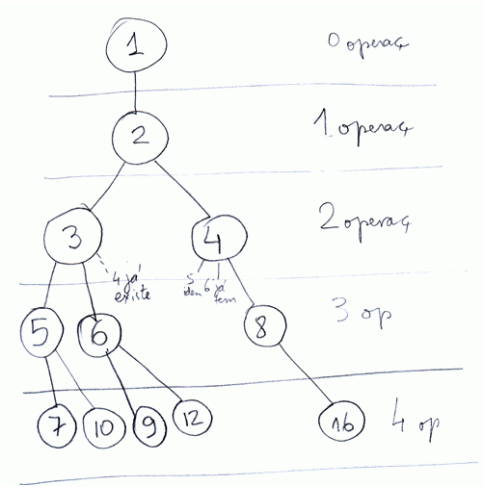
Neste ponto, consegue-se desenhar a seguinte estrutura de solução, que por acaso é uma árvore.




A regra para continuar a construir a árvore é: **Escolha a folha mais à esquerda. Combine-a com todos os nodos dela mesma, até a raiz. Se o resultado for inédito, desenhe-o como filho deste nodo. Se já tiver**

**aparecido antes, despreze-o**

Seguindo esta regra, desenha-se o próximo nivel.




Apenas para você ver como fica no programa eis um pedaço da árvore

```
Num    N  pai ops ok   ----------parciais----------
  1-   1   -1   0   0   0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
  2-   2    1   1  88   1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0  0
  3-   3    2   2  88   2  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  2
  4-   4    2   2  88   2  1  0  0  0  0  0  0  0  0  0  1
  5-   5    3   3  88   3  2  1  0  0  0  0  0  0  0  0  2
  6-   6    3   3  88   3  2  1  0  0  0  0  0  0  0  0  1
  7-   7    5   4  88   5  3  2  1  0  0  0  0  0  0  0  3
  8-   8    4   3  88   4  2  1  0  0  0  0  0  0  0  0  1
  9-   9    6   4  88   6  3  2  1  0  0  0  0  0  0  0  2
 10-  10    5   4  88   5  3  2  1  0  0  0  0  0  0  0  1
 11-  11    9   5  88  10  5  3  2  1  0  0  0  0  0  0  5
 12-  12    6   4  88   6  3  2  1  0  0  0  0  0  0  0  1
 13-  13    9   5  88  10  5  3  2  1  0  0  0  0  0  0  3
 14-  14    8   5  88   7  5  3  2  1  0  0  0  0  0  0  1
 15-  15    9   5  88  10  5  3  2  1  0  0  0  0  0  0  2
 16-  16    7   4  88   8  4  2  1  0  0  0  0  0  0  0  1
 17-  17   12   5  88  16  8  4  2  1  0  0  0  0  0  0  5
 18-  18   10   5  88   9  6  3  2  1  0  0  0  0  0  0  1
 19-  19   13   6  88  14  7  5  3  2  1  0  0  0  0  0  3
 20-  20    9   5  88  10  5  3  2  1  0  0  0  0  0  0  1
 21-  21   13   6  88  14  7  5  3  2  1  0  0  0  0  0  2
 22-  22   14   6  88  11 10  5  3  2  1  0  0  0  0  0  1
 23-  23   15   6  88  13 10  5  3  2  1  0  0  0  0  0  2
...
```

Observação: esta árvore não está desenhada na ordem em que ela foi criada. Se você acompanhar o desenho, verá – por exemplo – que o nodo 16 é criado muito antes do 15 ou do 14. Mas, a árvore acima foi **ordenada** antes de ser impressa...

## Diagonais

É o problema 28 do `projecteuler.net`. Diz:

Project Euler.net

About | Archives | Recent | News | Register | Sign In

## Number spiral diagonals

**Problem 28**

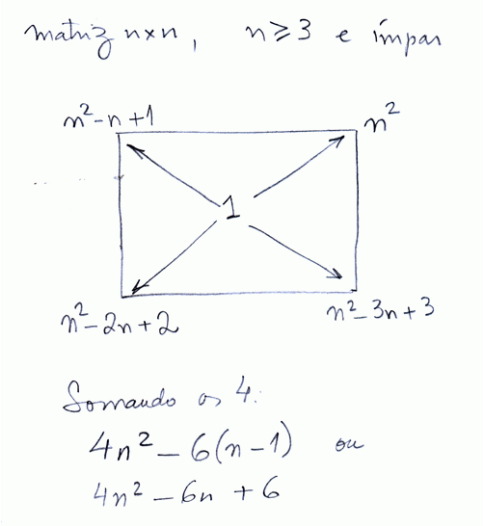
Starting with the number 1 and moving to the right in a clockwise direction a 5 by 5 spiral is formed as follows:

```
21 22 23 24 25
20  7  8  9 10
19  6  1  2 11
18  5  4  3 12
17 16 15 14 13
```

It can be verified that the sum of the numbers on the diagonals is 101.

What is the sum of the numbers on the diagonals in a 1001 by 1001 spiral formed in the same way?

Olhando a matriz que está escrita na folha, e estudando as 4 pontas em diagonal a partir do centro, tem-se



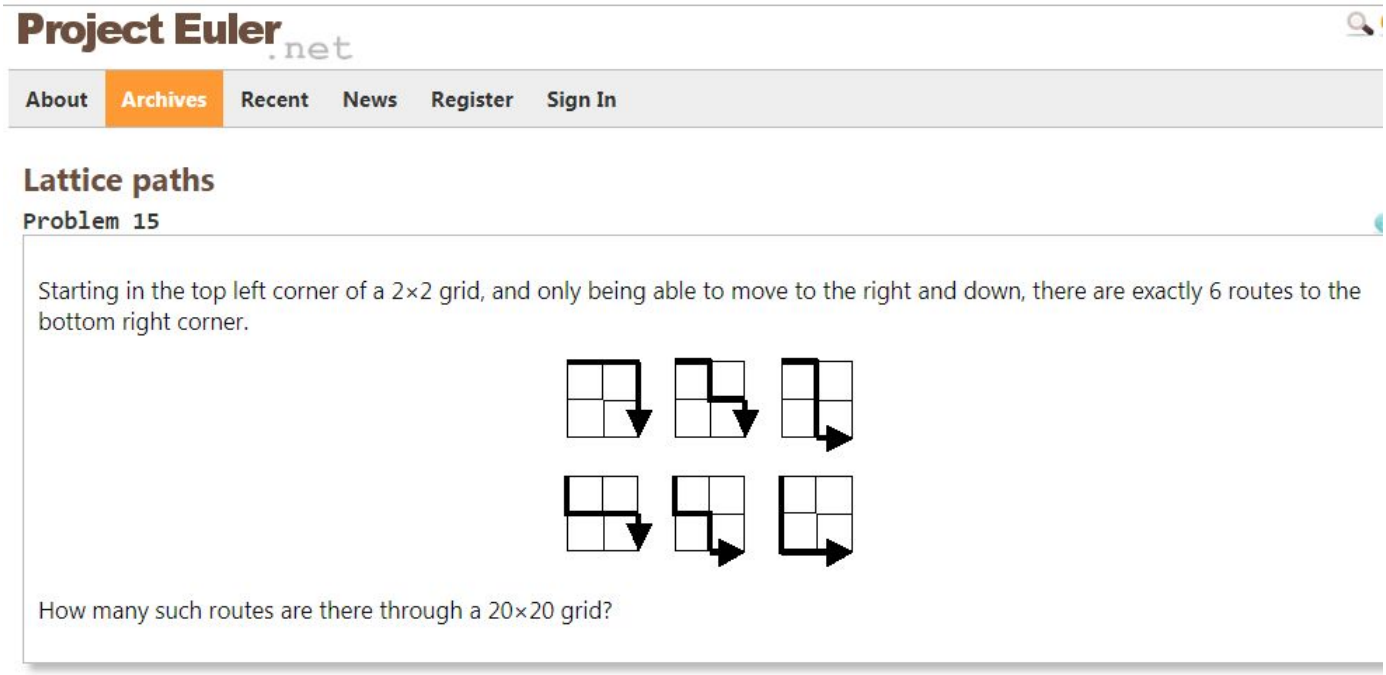

Para fazer isto via programa:

```
#include<stdio.h>

long int eulr(long int k) {
   if (k>2) {
  return ((4*k*k) - (6*(k-1)) + eulr(k-2));
   }
   else {
      return 1;
   }
}

long int euli(long int k) {
   int j, s=1;
   for (j=3;j<=k;j=j+2) {
      s=s+(4*j*j)-(6*(j-1));
   }
   return s;
}
main() {
   long int n,s=0;
   printf("Informe o tamanho da matriz (deve ser impar e maior que 2)\n");
   scanf("%ld",&n);
   printf("%ld \n",eulr(n)); // recursivo
```

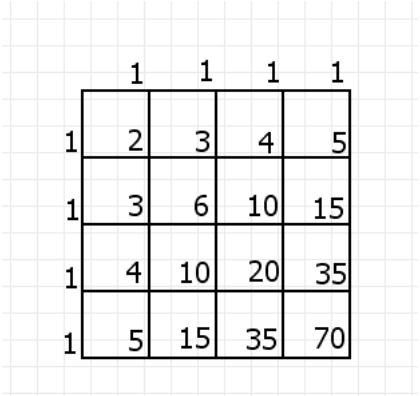
```
   printf("%ld \n",euli(n)); // iterativo, ambos dao o mesmo valor
}

Em PYTHON-----------------------------------------
# c35 - resolvedor da matriz na folha 035c
def eulr(k):
  if k>2:
    return ((k*k*4) - 6*(k-1)) + eulr(k-2)
  else:
    return 1

def euli(k):
  s=1
  for j in range(3,k+1,2):
    s=s+(4*j*j)-(6*(j-1))
  return s

def main():
  n=int(input("informe o tamanho da matriz (impar e >2) "))
  r=eulr(n)
  i=euli(n)
  print("recursivo e interativo " +str(r)+"  "+str(i))
```

### Caminho na treliça

É o problema 15 do projecteuler.net. Diz:




Considere o diagrama:




 ©75-18, Pedro Kantek

Cada número nesta treliça representa o número de rotas até aquele nodo ou ponto (que vem a ser a intersecção na treliça).

Por exemplo, considere o nodo que tem 15 rotas a ele na linha mais embaixo. Há 10 rotas para o nodo acima dele e há 5 rotas para o nodo à esquerda dele. Então há 10+5=15 rotas para ele no total. Desse mesmo jeito, cada um dos outros valores foi calculado e fica evidente que o número de rotas diferentes em uma treliça $4 \times 4$ é 70.

Programado e ajeitado em 29/04/14, por P. Kantek

```
def trelica(n):
    import numpy
    t=numpy.zeros((n,n))
    for i in range(n):
 for j in range(n):
   if i==0:
      t[i][j]=1
   if j==0:
       t[i][j]=1
    for i in range(1,n):
 for j in range(1,n):
   t[i][j]=t[i-1][j]+t[i][j-1]
#    print(int(t[n-1][n-1]))
    print(t)
```

## 13.12 Movimentos no Xadrez

O xadrez tem um papel fundamental na Inteligência Artificial, e por conseguinte na ciência da computação. Ele é suficientemente compacto para poder ser manuseado dentro de um computador, mesmo um computador da década de 50, com poucas centenas de bytes de memória. Mas, é abrangente e complexo para representar o grau máximo de abstração e simbolismo de que o ser humano é capaz. Turing, o genial criador desta ciência, sugriu em 1951 que *"em 50 anos, um computador será capaz de vencer o campeão mundial de xadrez"*. Ele errou por pouco: 1951+50=2001. Em 1997, Deep Blue, da IBM, venceu Gary Kasparov que era o campeão mundial. Que outra previsão – no mundo da computação – tem, teve ou terá tal grau de acerto ? O xadrez já foi chamado de *drosóphila melanogaster* da IA, similar à importância da mosca doméstica na genética.

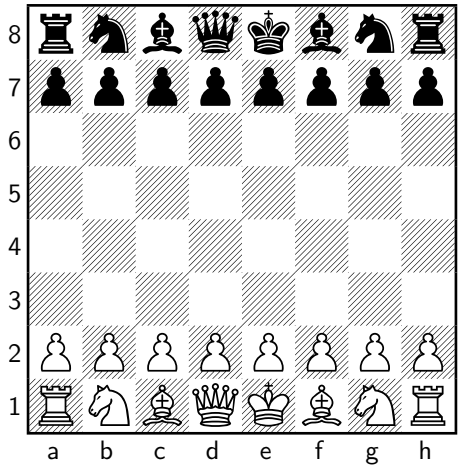
Abstraindo a computação, ainda assim o xadrez é um mundo maravilhoso. Aqui no Brasil, não temos grande tradição nele, mas em uma boa parte do mundo, as crianças aprendem a jogar e jogam durante toda sua vida escolar e por conseguinte muitos adultos seguem jogando vida afora. Isto, desde o século XII, que registra as primeiras manifestações do jogo, que por sinal é muito mais antigo do que isso.

Ele representa 2 exércitos que se opõe em um tabuleiro limitado (e pequeno) de 64 casas, e o único objetivo do jogo é vencer o exército inimigo. Esse fato é representado pela captura do rei oposto. Compõe o exército, as forças usuais: a infantaria, representada pelos peões em número de 8. As máquinas de guerra, as torres em número de 2. A igreja, personagem sempre influente, pelos seus 2 bispos. A cavalaria com 2 cavalos. Finalmente o casal real: a raínha ou dama, a peça mais poderosa no tabuleiro e o rei, limitado em movimentos, mas a peça em volta da qual todos operam.

Jogar xadrez é uma viagem intelectual indescritível, puro prazer. É superado pela construção de um programa de computador que jogue xadrez. Não é tarefa simples, mas deveria ser um investimento intelectual de todos quantos pretendam ser programadores plenos de computadores.

Como sempre, um programa grande e complexo precisa ser dividido em funções menores em tamanho e escopo. Uma parte importante em qualquer jogador é a análise e descoberta de todas as jogadas possíveis de uma determinada peça. Este exercício vai pedir que você programe uma pequena parte desta função.

**Preliminares** Antes de começar, é preciso se familiarizar com um tabuleiro armado.



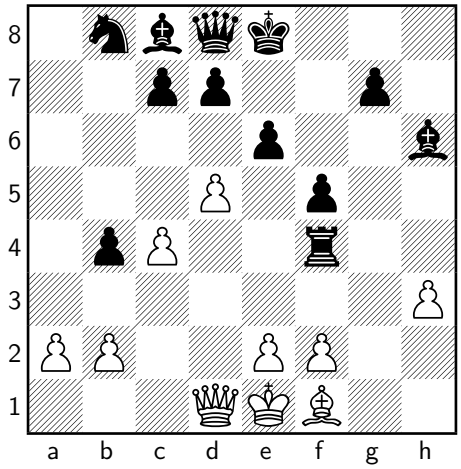
Tal disposição é boa para humanos, mas computadores precisam outra coisa: uma matriz numérica de $8 \times 8$, com casa brancas e negras alternadas sendo que que a casa embaixo, mais à direita, é branca. Por ser numérica, a matriz usa números para identificar as peças. Primeiro, a cor. Peças brancas são positivas e negras, negativas. Os valores: 1=peão, 2=torre, 3=cavalo, 4=bispo, 5=dama e 6=rei. Note que a célula linha 0, coluna 0, é a superior esquerda da matriz. Nesses termos, o tabuleiro acima corresponde a

```
 0   1   2   3   4   5   6   7
   +-------------------------------
 0 |  -2  -3  -4  -5  -6  -4  -3  -2
 1 |  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1
 2 |   0   0   0   0   0   0   0   0
 3 |   0   0   0   0   0   0   0   0
 4 |   0   0   0   0   0   0   0   0
 5 |   0   0   0   0   0   0   0   0
 6 |   1   1   1   1   1   1   1   1
 7 |   2   3   4   5   6   4   3   2
```

Você deve escrever um programa que vai receber um tabuleiro preenchido com uma situação de meio-jogo e também uma linha (0-7) e coluna (0-7). Você deve olhar o tabuleiro fornecido e ver qual é a peça que está lá. Identificada a peça e a sua cor, deve descobrir quantas casas essa peça pode ocupar num eventual próximo lance. Lembrando que as casas examinadas:

- se contiverem zero, podem ser ocupadas.
- se contiverem valor de sinal oposto ao da peça podem ser ocupadas, mas este valor implica parar na busca nessa direção (exceto o cavalo).
- se contiverem valor de mesmo sinal, não podem ser ocupadas e determinam final da busca.
- A casa não deve ser considerada se algum índice (linha ou coluna ou ambos) cair fora do tabuleiro.

Finalmente, não se assuste se aparecer um tabuleiro com alguma situação muito infrequente do ponto de vista enxadrístico: o gerador usa e abusa de números aleatórios. Vejamos um exemplo



Se o endereço a pesquisar fosse 4,5 a resposta deveria ser 7. Se fosse 1,2 a resposta deveria ser 2. Se fosse 0,1 a resposta deveria ser 2.

 ©75-18, Pedro Kantek

**Movimento do peão** Se na casa inicial, pode adiantar 1 ou 2 casas. Se em outras casas, só pode andar 1 posição. Pode tomar em diagonal, à direita ou à esquerda. Não se implementa aqui a tomada *en passant*, pois ela depende da jogada anterior, que neste caso é desconhecida.

```
import numpy as np
def peao(x,lin,col):
  casa=0
  if x[lin,col]==1:   #branca: de baixo p/ cima
    if lin>0 and x[lin-1,col]==0:
      casa=casa+1
    if lin==6 and x[4,col]==0 and x[5,col]==0:
      casa=casa+1
    if lin>0 and col<7 and x[lin-1,col+1]<0:
      casa=casa+1
    if lin>0 and col>0 and x[lin-1,col-1]<0:
      casa=casa+1
  else:   #preta: de cima para baixo
    if lin<7 and x[lin+1,col]==0:
      casa=casa+1
    if lin==1 and x[2,col]==0 and x[3,col]==0:
      casa=casa+1
    if lin<7 and col<7 and x[lin+1,col+1]<0:
      casa=casa+1
    if lin<7 and col>0 and x[lin+1,col-1]<0:
      casa=casa+1
  return casa
```

**Torre**

```
def torre(x,lin,col):
  casa=0
  nl=lin-1
  nc=col
  while nl>=0:
    if x[nl,nc]==0:
      casa=casa+1
    if x[nl,nc]*x[lin,col]<0:
      casa=casa+1
      nl=0
    if x[nl,nc]*x[lin,col]>0:
      nl=0
    nl=nl-1
  nl=lin+1
# ... nl<=7 ...
# ... nc<=7 ...
# ... nc>=0 ...
```

**Cavalo**

```
def cavalo(x,lin,col):
  casa=0
  dlin=[-2,-1,1,2,2,1,-1,-2]
  dcol=[1,2,2,1,-1,-2,-2,-1]
  for i in range(8):
    nl=lin+dlin[i]
    nc=col+dcol[i]
    if nl<=7 and nl>=0 and nc<=7 and nc>=0:
      if x[nl,nc]==0 or x[nl,nc]*x[lin,col]<0:
 casa=casa+1
  return casa
```

**Bispo**

```
def bispo(x,lin,col):
  casa=0
  nl=lin-1
  nc=col-1
  while nl>=0 and nc>=0:
    if x[nl,nc]==0:
      casa=casa+1
    if x[nl,nc]*x[lin,col]<0:
      casa=casa+1
      nl=0
    if x[nl,nc]*x[lin,col]>0:
      nl=0
    nl=nl-1
    nc=nc-1
  nl=lin-1
  nc=col+1
# ... while nl>=0 and nc<=7...
# ... while nl<=7 and nc>=0...
# ... while nl<=7 and nc<=7...
```

**Dama e Rei** Fazendo os devidos ajustes aos controles de torre e bispo, é quase trivial. Ficam para você fazer, por falta de espaço.

## 13.13 Sistemas Lineares e matriz inversa

O sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + ... + a_{1n}\ x_n & = & b_1 \\ a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + ... + a_{2n}\ x_n & = & b_2 \\ ... & & \\ a_{m1}\ x_1 + a_{m2}\ x_2 + ... + a_{mn}\ x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

é equivalente à seguinte equação matricial

$$\left(\begin{array}{l} a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ...\ a_{2n} \\ ... \\ a_{m1}\ a_{m2}\ ...\ a_{mn} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{array}\right)$$

no sentido de que toda solução do primeiro é igualmente solução do segundo. Dessa maneira pode-se resumir qualquer dos sistemas acima na forma matricial escrevendo

$$Ax = B$$

### Matrizes Inversíveis

Diz-se que uma matriz quadrada é inversível se existe uma matriz $B$ com a propriedade de que $AB = BA = I$ onde $I$ é a matriz unidade.

A matriz $B$ inversa de $A$ é única se existir. A matriz inversa de $A$ é indicada por $A^{-1}$. Note-se que a relação acima é simétrica, pois se $B$ é a inversa de $A$ então $A$ também é inversa de $B$.

### Mecanismos de cálculo da inversa

**Usando a teoria:** Usando a teoria, dada uma matriz como por exemplo $\left(\begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{array}\right)$

Uma possibilidade é querer encontrar escalares $x$, $y$, $z$ e $w$ para os quais
$\left(\begin{array}{cc} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} x & y \\ z & w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$ ou
$\left(\begin{array}{cc} 3x+5z & 3y+5w \\ 2x+3z & 2y+3w \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)$
ou ainda equações que satisfaçam $\left\{\begin{array}{l} 3x+5z=1 \\ 2x+3z=0 \end{array}\right.$ $e$ $\left\{\begin{array}{l} 3y+5w=0 \\ 2y+3w=1 \end{array}\right.$
Resolvendo estas equações, acha-se a matriz inversa que é $\left(\begin{array}{cc} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{array}\right)$.

**Usando determinantes:** Outros métodos (extraídos do excelente site http://mathworld.wolfram.com) vão a seguir descritos: Dada uma matriz $2 \times 2$ representada por $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, a inversa é dada por

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$.

Para uma matriz $3 \times 3$ veja lá no site, que o espaço aqui é muito pequeno.

**Usando Gauss-Jordan:** Neste método escreve-se a matriz da qual se quer achar a inversa ao lado esquerdo da matriz identidade, formando este arranjo (matriz escalonada reduzida por linhas).

$[AI] = \begin{vmatrix} a_{11} \ ... \ a_{1n} & 1 \ 0 \ ... \ 0 \\ a_{21} \ ... \ a_{2n} & 0 \ 1 \ ... \ 0 \\ ... & ... \\ a_{n1} \ ... \ a_{nn} & 0 \ 0 \ ... \ 1 \end{vmatrix}$ Aplica-se agora a este arranjo as técnicas de eliminação de Gauss, sobre o conjunto todo,

de maneira a ficar com o seguinte arranjo $\begin{vmatrix} 1 \ 0 \ ... \ 0 & b_{11} \ ... \ b_{1n} \\ 0 \ 1 \ ... \ 0 & b_{21} \ ... \ b_{2n} \\ ... & ... \\ 0 \ 0 \ ... \ 1 & b_{n1} \ ... \ b_{nn} \end{vmatrix}$

Neste ponto, a matriz $(b_{ij})$ é a matriz inversa de $A$. Ou seja $A^{-1} = B$ e também $AB = I$.

A vantagem deste último método é que ele vale para qualquer dimensão de matriz. É este método que vai ser programado em Python a seguir.

### Para que serve a matriz inversa ?

Inúmeras aplicações, mas vamos focar aqui na solução de sistemas lineares. Dado o sistema $Ax = B$, a matriz $A$ é a dos coeficientes. Se você calcular a inversa $A^{-1}$, poderá resolver inúmeras instâncias do mesmo sistema, sem outra preocupação, já que $A^{-1} \times B = x$. Vamos ver um exemplo do que se diz aqui. Seja um sistema, dado por

$$\left\{ \begin{array}{lll} 3x + 2y + z & = & \\ x - y + z & = & \\ 5x + z & = & \end{array} \right\}$$

Escrito na forma matricial, o sistema fica $Ax = B$, onde $A$ é a matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculando a matriz inversa desta, obtém-se: $\begin{pmatrix} -0.1 & -0.2 & 0.3 \\ 0.4 & -0.2 & -0.2 \\ 0.5 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}$

Agora, a solução para a instância onde $B = \{10, 2, 8\}$ é obtida fazendo-se $A^{-1} \times B$ que dá os valores $x = 1, y = 2, z = 3$. Para outra instância cujo $B$ seja $\{30, -1, 26\}$, ao fazer a mesma multiplicação, obtém-se $x = 5, y = 7, z = 1$ e assim por diante.

Este exercício pede que você implemente o algoritmo de Gauss-Jordan para cálculo da matriz inversa e depois o aplique a uma matriz de ordem suficientemente alta para desencorajar o cálculo manual da mesma. Relembrando as etapas, você deve:

1. Escrever a matriz $A$ e ao seu lado a matriz $I$.
2. Aplicar operações elementares com linhas a $A$ visando transformá-la em $I$.
3. Aplicar rigorosamente as mesmas operações sobre a matriz ao lado.
4. Quando $A$ tiver se transformado em $I$, a matriz que era originalmente $I$ se transformou em $A^{-1}$.
5. Para conferir, faça a multiplicação matricial entre $A$ e $A^{-1}$. Tem que dar $I$.

Vamos aplicar este processo ao sistema acima descrito. O objetivo é produzir um zero no coeficiente do $x$ na segunda equação: Para isso:
$a[1][] = a[1][] + a[0] \times (-a[1][0]/a[0][0])$ onde a notação $a[1][]$ deve ser entendida como a aplicação da operaçao à toda a linha [1] da matriz $a$. Mas, atenção: isto não vale no compilador C++. Lá, tem que ser por extenso.

Note-se também que o fator $(-a[1][0]/a[0][0])$ é o mesmo para toda a linha e portanto deve ser calculado antes e preservado durante todo o ciclo. O algoritmo vai chamar este fator de *pivot* e ele vai ser previamente calculado e guardado.

para calcular o zero no coeficiente de $x$ na terceira linha, o comando
é $a[2][] = a[2][] + a[0] \times (-a[2][0]/a[0][0])$.

Para a segunda coluna, começa-se achando o zero na primeira linha. O comando agora é
$a[0][] = a[0][] + a[1][] \times (-a[0][1]/a[1][1])$ e depois
$a[2][] = a[2][] + a[1][] \times (-a[2][1]/a[1][1])$. A terceira coluna é
$a[0][] = a[0][] + a[2][] \times (-a[0][2]/a[2][2])$ e
$a[1][] = a[1][] + a[2][] \times (-a[1][2]/a[2][2])$.
Com estas operações, os zeros foram alcançados. Agora basta transformar os elementos da diagonal principal na unidade. As operações são:
$a[0][] = a[0][]/a[0][0]$, $a[1][] = a[1][]/a[1][1]$ e $a[2][] = a[2][]/a[2][2]$.

Note que não houve preocupação em determinar se a matriz $A$ é inversível. Isto foi deixado para não complicar demais o algoritmo. Fica como desafio para os mais corajosos.

Eis o algoritmo:

```
import numpy as np
def cami(x):
  # x e a matriz de ordem ta de quem
  #      se quer obter a inversa
  ta=len(x[0])
  y=np.identity(ta,float) #tem 0, na dp tem 1
  i=0
  while(i<ta):
    j=0
    while(j<ta):
      if (j!=i):
 pivot=-x[j][i]/x[i][i]
 k=0
 while k<ta:
 x[j][k]=x[j][k]+x[i][k]*pivot
 y[j][k]=y[j][k]+y[i][k]*pivot
 k=k+1
      j=j+1
    alvo=x[i][i]
    k=0
    while k<ta:
      y[i][k]=y[i][k]/alvo
      x[i][k]=x[i][k]/alvo
      k=k+1
    i=i+1
  return y;
a=np.array([[2.1, 3.2],[4.3,5.4]],float)
b=cami(a)
print(b)
```

**Um exemplo** Para você testar seu algoritmo, use-o nesta matriz:

```
 59 57 44 42 65 23 47 66 78 71
 94 36 83 17 12 86  4 92 43 95
 12 61 18 10 94 45 94 81 30 76
  9 49 92 22 90 22 27  6 21 26
 31 45 96 26 26 75 59 39 47 98
 33 27  9 94 29  5 49 68  9 33
 61 81 17 18 61 74 16 37 34 45
 64 85 46 74 49 81 69 20 18 59
 17 54 66 65 94 54 76 54 30 76
 68 91 61 89  6 57 35 92 52 80
```

Aqui a resposta (sexta linha, sétima coluna, vezes 1000) deverá ser 151.989, deverá ser 151.989, já devidamente multiplicada por 1000.

## 13.14 Truques variados de programação

**Peso de um trem** Um trem é composto por muitos vagões conectados. Neste exercício você é um despachante de trens. Uma composição pode ter dezenas de vagões e locomotivas e o trem precisa passar por pontes e viadutos que tem limites rígidos de peso suportado. Cada vagão tem um certo peso e a composição precisa ser pensada para que num

determinado instante, a soma de 5 ou menos carros adjacentes (5 é um número fixo, e ele corresponde ao comprimento da maior ponte na malha ferroviária) não ultrapasse o limite de peso das estruturas pelas quais o trem passará. Os últimos valores do vetor geralmente correspondem ao peso das locomotivas, e elas devem ser tratadas como se vagões fossem. Do ponto de vista deste problema, não há diferença entre vagão e locomotiva, ambos pesam.

Nos limites inicial e final do trem, a soma do peso deve levar em consideração este fato. Assim, se apenas a locomotiva está sobre a ponte, apenas o peso dela deve ser considerado. A medida em que mais vagões vão entrando, a soma deve ser incrementada, até o limite de 5 parcelas, pois quando o sexto vagão entrar, o primeiro terá saído da ponte e deve ser desconsiderado.

Você deve escrever um programa que leia um vetor representando os pesos de cada vagão e locomotivas de um trem e um limite de peso máximo suportado naquele trajeto e deve certificar se aquele trem pode fazer ou não essa viagem.

Havendo ultrapassagem do limite proposto, o programa deve sinalizar qual o vagão central (o terceiro do conjunto de 5) que ocasionou este fato. Para esta sinalização, pode numerar os vagões a partir do zero, tal como o C++ ou o Python fazem.

Se ao final o trem estiver liberado o programa deve mandar a mensagem "Liberado"ou senão a mensagem "O trem nao pode passar".

A seguir, dois exemplos de execução: Para um trem formado por: 100, 3, 3, 3, 2, 5 e 200 e com um limite de 101 o programa deve informar ter ultrapassado o limite nos vagões 0, 1, 2, 4, 5 e 6, e portanto "o trem não pode passar".

Um segundo exemplo é: 10, 20, 30, 40, 50, 40, 30, 20, 10 e 160, com limite de 200. Os vagões 7 e 8 impedem a passagem. Finalmente o mesmo trem com limite de 261, permite a passagem.

**Truque: janela deslizante** Trata-se de uma janela que percorre os dados e em cada momento faz algo com os dados que estão sob a janela naquele instante. A idéia é muito usada em processamento digital de imagens, para filtros, melhoradores, etc. Aqui a janela é unidimensional correspondendo a 5 vagões. As dificuldades do truque são representadas pelo tratamento dos limites ou das bordas. Uma possibilidade é acrescentar dois zeros antes e depois do vetor e começar a análise pela terceira posição, encerrando-a na antepenúltima.

```
def f183():
  f=open("c:/p/n/183/f183001_exemplo.myd","r")
  i=0
  liberado=0
  while(i<100):
    x=f.readline()
    trem = x.split()
    tr=[]
    for j in trem:
      tr.append(int(j))
    # processa tr (que é uma lista de inteiros)
    k=2
    passou=0
    while (k<18):
      if (tr[k-2]+tr[k-1]+tr[k]+tr[k+1]+tr[k+2])
   <=tr[20]:
 passou=passou+1
      k=k+1
    if passou==16:
      liberado=liberado+1
    i=i+1
  print("Trens liberados: ",liberado)
```

**Porto e Containeres** Como se sabe o comércio mundial teve um enorme incremento com o surgimento da idéia de container. Trata-se de uma caixa de aço que é embalada na origem, manipulada em diversos modais (caminhão, trem e navio) de forma ágil e desembalada apenas no destino.

Imagine um megaporto com um enorme pátio de containeres. Para nossa facilidade o pátio está dividido em ruas e avenidas e entre elas existem quarteirões onde os containeres são armazenados. Nesta simulação, o pátio é representado por uma matriz retangular. Nela, cada célula contém o número de containeres que existem naquele quarteirão no pátio. Por exemplo, se na matriz, na linha 8 coluna 5 existe o valor 88, isto significa que no quarteirão da avenida 8 com a rua 5 existem 88 containeres guardados.

Escreva um programa que leia essa matriz de M linhas por N colunas (M e N definidas externamente) chamada PORTO contendo a disposição atual dos containeres no pátio e determine o a quantidade e localização do maior e do menor quarteirões e também a distância em linha reta (medida em quarteirões) entre eles. Por característica do problema nunca haverá dois ou mais valores iguais na matriz.

```
Por exemplo,
```

```
18 17 22 31 12   -> maior:90 L1, C4
16  8  2  4 90   -> menor: 1 L1, C2
32 33 34 35 36   -> dist.: 2,82
40 41  1 11 15

 1  2  3  4  5  6  -> mai: 24 L3, C5
 7  8  9 10 11 12  -> men: 1 L0, C0
13 14 15 16 17 18  -> d: 5,83
19 20 21 22 23 24
```

**Truque: Teorema de Pitágoras** Usado aqui para calcular a distância entre dois pontos. Basta criar um triângulo retângulo no qual a hipotenusa é o valor da distância a descobrir. Agora o problema se transfere para descobrir o valor dos catetos do triângulo. Neste caso é fácil pelo uso de um sistemas de coordenadas ortogonais.

```
  i=0
  while (i<4):
    patio=np.zeros((22,22),int)
    lin=0
    while lin<22:
      x=f.readline()
      pa=x.split()
      p=[]
      for j in pa:
 p.append(int(j))
      xixa=0
      while xixa<22:
 patio[lin][xixa]=p[xixa]
 xixa=xixa+1
      lin=lin+1
    c1x=np.argmax(patio)//22
    c1y=np.argmax(patio)%22
    c2x=np.argmin(patio)//22
    c2y=np.argmin(patio)%22
    print("Max-Min: ",i+1,
    (((c1x-c2x)**2)+((c1y-c2y)**2))**0.5)
    i=i+1
```

**Avaliação de uma mão de poker** Como se sabe no jogo de poker, as possibilidades de pontuação são ⋆ straight flush (5 cartas seguidas do mesmo naipe)
⋆ quadra (4 cartas de mesmo valor)
⋆ full house (3 cartas iguais entre si e outras 2 iguais entre si)
⋆ flush (5 cartas de mesmo naipe)
⋆ sequencia: (5 cartas seguidas)
⋆ trinca (3 cartas iguais)
⋆ jogos menores: 2 pares, 1 par, maior carta...

A próxima discussão é a respeito da representação das cartas. Inúmeras possibilidades ocorrem aqui, mas vai-se usar a seguinte: O naipe da carta é representado pela centena: 100=ouros, 200=espadas, 300=copas e 400=paus. A carta será representada pelas dezenas: 01=ás, 02 a 10=a própria carta, 11=dama, 12=valete e 13=rei. Por exemplo, a carta 408 é um 8 de paus, 113 é um rei de ouros e 201 é o ás de espadas.

**Truque: usar e abusar de resto e de divisão inteira** Usar-se-ão estas 2 operações para quebrar um número como 113 em 100 (113 *div* 100) e em 13 (113 *mod* 100).

```
def quadra(x):
  l=[0]*5
  for i in range(5):
    l[i]=x[i]%100
  l.sort()
  if ((l[0]==l[1] and l[1]==l[2] and l[2]==l[3])
   or (l[1]==l[2] and l[2]==l[3] and l[3]==l[4])):
    return 1
  else:
    return 0
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
def fullh(x):
  l=[0]*5
  for i in range(5):
    l[i]=x[i]%100
  l.sort()
  if ((l[0]==l[1] and l[1]==l[2] and l[3]==l[4])
   or (l[0]==l[1] and l[2]==l[3] and l[3]==l[4])):
    return 1
  else:
    return 0
def flush(x):
def seque(x):
def trinca(x):
...
  i=0 ; ctfl=ctqu=ctfh=ctse=cttr=0
  while i<200:
    x=f.readline()
    pa=x.split()
    p=[]
    for j in pa:
      p.append(int(j))
    for k in range(5):
      ctfl=ctfl+flush(p[(k*5):5+(k*5):])
      ctqu=ctqu+quadra(p[(k*5):5+(k*5):])
      ctfh=ctfh+fullh(p[(k*5):5+(k*5):])
      ctse=ctse+seque(p[(k*5):5+(k*5):])
      cttr=cttr+trinca(p[(k*5):5+(k*5):])
    i=i+1
  print("Flush = ",ctfl)
  print("Quadra = ",ctqu)
  print("Full hand = ",ctfh)
  print("Sequencia = ",ctse)
  print("Trinca = ",cttr)
```

**Números similares** Faça um programa para ler 2 números naturais de 3 algarismos e verificar se eles são similares. Para serem similares estes números precisam ter os mesmos algarismos na sua formação.

```
Exemplo de execução:
Digite 2 números: 231 312
Números similares

Digite 2 números: 452 357
Números não similares

Outro exemplo de execução:
Digite 2 números: 167 167
Números similares
```

**O truque:** quebrar um número inteiro qualquer em seus dígitos componentes e a seguir processar tais dígitos isoladamente é tarefa comum em programação. Primeiro, a quantidade de dígitos é obtida pela expressão $ceil(log_{10}(x))$ que só não funciona em números cheios: 1 seguido de $n$ zeros. A separação de dígitos pode ser feita, rodando-se sucessivamente o trecho de programação (em Python)

```
x é o número que se quer quebrar
digitos[n] é um vetor de dígitos
dig=[]
x=...
while x>0:
  dig.append(x%10)
  x=x//10
dig.reverse()
print(dig)
```

Este trecho só não funciona para o número 0 que deve ser tratado à parte. Para este problema em particular, como se sabe que os números terão 3 dígitos, a conversão pode ser mais direta:

```
def f184():
 f=open("c:/p/n/184/f184001_exemplo.myd","r")
 i=0
 ct=0
 while i<500:
  x=f.readline()
  nums=x.split()
  a=int(nums[0])
  b=int(nums[1])
  d0=a//100
  d2=a%10
  d1=(a//10)%10
  e0=b//100
  e2=b%10
  e1=(b//10)%10
  if (((d0==e0) or (d0==e1) or (d0==e2)) and
   ((d1==e0) or (d1==e1) or (d1==e2)) and
   ((d2==e0) or (d2==e1) or (d2==e2))):
    if (((e0==d0) or (e0==d1) or (e0==d2)) and
     ((e1==d0) or (e1==d1) or (e1==d2)) and
     ((e2==d0) or (e2==d1) or (e2==d2))):
       ct=ct+1
  i=i+1
 print(ct)
```

**Brinquedos inteligentes** A empresa tem muitos brinquedos pequenos sempre guardados em caixas no formato de cubos (paralelepípedos retos com arestas iguais). A empresa comprou muitas esferas de raios 10, 20 e 30 cm. Pretende encerrar cada brinquedo dentro de uma esfera (como se fosse um kinder ovo). Você deve escrever um programa que peça e receba a aresta do cubo de um brinquedo e deve descobrir qual a menor esfera que pode escondê-lo, imprimindo o raio da esfera. Se o brinquedo não couber nem na maior esfera, o programa deve imprimir NAO CABE. O programa deve processar uma quantidade indeterminada de brinquedos, parando ao receber uma aresta negativa, que não deve ser processada e indica final dos dados. Dados: $V_{cubo} = a^3$, $V_{esfera} = 4/3\pi \times r^3$, Diagonal do cubo: $a \times \sqrt{3}$, Diâmetro da esfera: $2 \times r$

```
Dados de uma execucao real:
Informe a aresta do brinquedo 10
esfera de 10cm de raio
Informe a aresta do brinquedo 12
esfera de 20cm de raio
Informe a aresta do brinquedo 20
esfera de 20cm de raio
Informe a aresta do brinquedo 30
esfera de 30cm de raio
Informe a aresta do brinquedo -1
```

Um possível gabarito

```
a10=a20=a30=anao=0
i=0
p=[]
while i<500:
  x=f.readline()
  nums=x.split()
  a=int(nums[0])
  b=int(nums[1])
  p.append(a)
  p.append(b)
  i=i+1
for i in range(1000):
  diagonal=p[i]*np.sqrt(3)
  if diagonal<=10:
    a10=a10+1
  if diagonal>10 and diagonal <= 20:
    a20=a20+1
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
    if diagonal>20 and diagonal <=30:
      a30=a30+1
    if diagonal > 30:
      anao=anao+1
  print("10=",a10,"20=",a20,"30=",a30,"~=",anao)
```

**O truque:** Processar objetos com base em suas características geométricas. Aqui, tem-se um cubo inscrito a uma esfera. Seus pontos de contato são os pares de vértices opostos do cubo, que neste ponto coincidem com um diâmetro da esfera.

**distância cartesiana** Escreva um programa que leia as coordenadas cartesianas (x,y) de 2 pontos, A e B no espaço e imprima na tela a menor distância entre os 2 pontos e também a distância do menor caminho de A até B passando por um ponto intermediário, C com coordenadas (0,0). Deve ser definida e usada a função de nome dist() que retorna a distância entre 2 pontos, cujas coordenadas são passadas como parâmetros. Obs.: Considere que a distância entre 2 pontos de coordenadas $(x_a, y_a)$ e $(x_b, y_b)$ é dada por $distAB = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$ A distância do caminho de A até B passando por C = (0,0) é dado por caminho AB = dist AC + dist CB .

```
Exemplo de execução:
Digite coordenada de A: 10 50
Digite coordenada de B: 70 35
Menor distância entre A e B: 61.8466
Caminho de A a B, passando por (0,0): 129.253
```

**O truque:** Trata-se de associar a objetos do mundo real, suas coordenadas em algum sistema cartesiano. Com a popularização do Google maps e sistemas similares, bem como o barateamento dos dispositivos GPS, é questão de tempo que praticamente todos os itens que entrem em algum meio magnético (computacional) tragam com eles suas coordenadas. Daí a precisar calcular distâncias é um passo bem pequeno.

```
import numpy as np
def dcart(p1,p2):
  return (((p1[0]-p2[0])**2)+
      ((p1[1]-p2[1])**2))**0.5
...
  i=0
  dab=dacb=0
  while i<1000:
    x=f.readline()
    nums=x.split()
    p1=[int(nums[0]),int(nums[1])]
    p2=[int(nums[2]),int(nums[3])]
    dab=dab+dcart(p1,p2)
    dacb=dacb+dcart(p1,[0,0])+dcart([0,0],p2)
    i=i+1
  print("D1 = ",dab,"  D2=",dacb)}
```

**Números crescentes** Vamos chamar de crescente um número natural $n = d_1 d_2 ... d_k$ cujos dígitos $d_i$ estão em ordem crescente, isto é, tal que $d_1 < d_2 < ... < d_k$. Faça um programa em C++ que leia um número inteiro e positivo $n$ de 3 dígitos e verifique se n é crescente. Seu programa deve também verificar se $n$ possui exatamente 3 dígitos e imprimir mensagens adequadas em cada caso.

```
Exemplo de execução:
Entre com um inteiro positivo:
3416
valor inválido.

Entre com um inteiro positivo: 152
152 não é crescente.

Entre com um inteiro positivo: 378
378 é crescente.
```

**O truque:** quebrar um número inteiro qualquer em seus dígitos componentes e a seguir processar tais dígitos isoladamente é tarefa comum em programação. Primeiro, a quantidade de dígitos é obtida pela expressão $ceil(log_{10}(x))$ que só não funciona em números cheios: 1 seguido de $n$ zeros. Neste exemplo, como a demanda é direta (3 dígitos) basta testar o número entre 101 e 999.

A separação de dígitos pode ser feita, rodando-se sucessivamente o trecho de programação (em C++)

```
digs=[] # conterá os dígitos
x=... # o valor a quebrar
while x>0:
   digs.append(x%10)
   x=x//10
digs.reverse()
print(digs)
```

Este trecho só não funciona para o número 0 que deve ser tratado à parte. Para este problema em particular, como se sabe que os números terão 3 dígitos, a conversão pode ser mais direta:

```
def f185():
  f=open("c:/p/n/185/f185001_exemplo.myd","r")
  i=0
  p=[]
  while i<50:
    x=f.readline()
    nums=x.split()
    for j in range(10):
      p.append(int(nums[j]))
    i=i+1
  ct=0
  for i in range(len(p)):
    x=p[i]
    dig=[]
    while x>0:
      dig.append(x%10)
      x=x//10
    sentinela=0
    for j in range(1,len(dig)):
      if dig[j]>=dig[j-1]:
 sentinela=1
    if sentinela==0:
      ct=ct+1
  print("Crescentes=",ct)
```

**Números perfeitos, deficientes e abundantes** Um inteiro $n$ é dito um número perfeito se ele é igual a soma de todos os seus divisores positivos, excluindo ele mesmo. Por exemplo, 6 é um número perfeito, pois seus divisores são 1, 2 e 3 e 1+2+3 = 6. O número 28 também é perfeito, pois 1+2+4+7+14=28. Faça um programa em C++ que leia uma sequência de números inteiros $n_1, n_2, ..., n_k$ e informe ao usuário, para cada $n_i$ lido, se ele é um número perfeito ou não. Aproveitando o desenvolvimento, se um número é menor que a soma dos divisores próprios ele é deficiente e se é maior ele é abundante. (por exemplo, 12 é abundante pois: $1+2+3+4+6 = 16 > 12$). Note que a origem dos índices é zero.

```
Exemplo de execução:
Entre com um inteiro: 2
2 não é um número perfeito.
Entre com um inteiro: 28
28 é um número perfeito.
Entre com um inteiro: 79
79 não é um número perfeito.
Entre com um inteiro: 8128
8128 é um número perfeito.

import numpy as np
def divs(x):
  soma=1
  for i in range(2,1+x//2):
    if x%i==0:
      soma=soma+i
  return soma
...
  i=0
  p=[]
```

```
  while i<50:
    x=f.readline()
    nums=x.split()
    for j in range(10):
      p.append(int(nums[j]))
    i=i+1
  cper=cabu=cdef=0
  for i in range(len(p)):
    xx=divs(p[i])
    if xx==p[i]:
      cper=cper+1
    elif xx>p[i]:
      cabu=cabu+1
    else:
      cdef=cdef+1
  print("Perf=",cper," Abu=",cabu," Def=",cdef)
```

**O truque:** Achar os divisores de um número inteiro. Note-se que se está no âmbito da matemática inteira, razão da divisão inteira e da operação resto.

**Localização de mercado** Uma empresa de supermercados pretende abrir uma filial em alguma região de uma cidade absolutamente regular, já que todos os seus quarteirões são quadrados de 100x100m e as ruas sempre se interceptam em ângulos retos.

Seu programa deve ler uma matriz quadrada de ordem N que contém a quantidade de habitantes da cidade em cada quarteirão. Assim, se a posição 2,2 da matriz tem 50, significa que no quarteirao da linha 3, coluna 3 há 50 clientes. Note que a numeração começa em 0, assim 2 significa linha ou coluna 3.

Deve ler também 3 valores: as coordenadas x,y da possível localização do supermercado (começando em 0) e também um parâmetro denominado $aa$ = área de abrangência do mercado. aa é sempre um número ímpar, isto não precisa ser testado. x,y nunca vai estar nos limites da cidade, assim sempre haverá espaço para acomodar a submatriz de dimensão $aa \times aa$.

O programa deve totalizar quantos clientes serão atingidos pelo mercado naquela localização e com aquela área de abrangência, somando todas as células da matriz que estejam incluídas na submatriz quadrada centralizada em $x, y$ e com dimensões $aa$.

Deve imprimir também a quantidade de clientes atingidos no maior quarteirão (aquele que tem mais clientes).

Ao final a matriz deve ser impressa.

```
Exemplos de execução:
Seja a matriz (N=6)
 1 1 3 0 5 3
 7 2 9 1 1 2
 3 4 5 6 0 6
 1 2 1 2 3 4
 5 2 2 8 9 3
 1 2 3 3 5 3
com x=3, y=3 e aa=3, R=36 e 9 respectivamente.
com x=2, y=2 e aa=5, R=83 e 9.
com x=1, y=4 e aa=1, R=1 e 1.
com x=1, y=4 e aa=3, R=24 e 6.

...
  i=tudo=tudomax=0
  while i<50:
    m=np.zeros((10,10))
    for j in range(10):
      x=f.readline()
      nums=x.split()
      for k in range(10):
 m[j,k]=int(nums[k])
    x=f.readline()
    nums=x.split()
    lin=int(nums[0])
    col=int(nums[1])
    tam=int(nums[2])
```

```
    tt=tam//2
    somsom=0
    maximo=-999999
    for ii in range(lin-tt,lin+tt+1):
      for jj in range(col-tt,col+tt+1):
 somsom=somsom+m[ii,jj]
 if m[ii,jj]>maximo:
 maximo=m[ii,jj]
    tudo=tudo+somsom
    tudomax=tudomax+maximo
    i=i+1
  print(tudo,tudomax)
```

**Leitura de dados** Para ler os dados de entrada de um arquivo (ao invés do teclado) em Python deve-se: i. abrir o arquivo, ii. ler seus registros (via readline()) iii. Transformar a linha lida em um vetor de caracteres (via x.split(), iv. Transformar cada número desses em um inteiro, colocando-o em uma lista (via append.int(nums[k])). Veja no código acima como isso foi feito.

**Matrizes simétricas** Escreva um programa que analise uma matriz e informe se ela é ou não é simétrica. Para esta verificação, os elementos simétricos em relação à diagonal principal devem ser iguais. A matriz precisa ser quadrada e nela todos elementos $m[i][j]$ precisam ser iguais a $m[j][i]$. Por abuso, esta regra pode ser aplicada aos elementos que estão na diagonal principal, já que quem está nela tem $i = j$ e portanto $m[i][j]$ sempre será igual a $m[j][i]$ quando $i = j$. Mas, nada se perde se elementos da diagonal principal simplesmente não forem testados. De acordo com a regra, basta que um único elemento simétrico seja diferente para que a matriz toda o seja. Um possível gabarito:

```
import numpy as np
def f186():
  f=open("c:/p/n/186/f186001_exemplo.myd","r")
  i=ct=0
  m=np.zeros((10,10))
  while i<10:
    for ii in range(10):
      x=f.readline()
      nums=x.split()
      for jj in range(10):
 m[ii,jj]=int(nums[jj])
    sentinela=0
    for ii in range(10):
      for jj in range(10):
 if m[ii,jj]!=m[jj,ii]:
 sentinela=1
    if sentinela==0:
      ct=ct+1
    i=i+1
  print("Simetricas = ",ct)
```

**O truque: Sentinela** é uma variável que sinaliza uma determinada condição ao longo de um processamento completo. Usada muitas vezes, como neste contexto, no qual uma única condição perdida em um volume grande de situações e lugares (como um único elemento simétrico diferente) pode determinar uma condição mais geral (toda a matriz deixou de ser simétrica).

Para otimizar o processamento, ao invés de usar os dois ciclos *for* poderíamos ter usado ciclos *while*, incluindo neles (com AND) a condição $sentinela = 0$, para que, uma vez descoberto um elemento diferente a busca fosse encerrada.

**Vulcão no Havai** Como sabemos o Havai está neste momento em processo de manifestação vulcânica intensa. O vulcão Saidebaixo, numa ilha lá, tem algumas características interessantes:
a) fica numa ilha que tem platôs quadrados, de altura regular e é deserta.
b) sua lava é muito líquefeita, quase líquida, saindo da cratera e escorrendo, se possível, para as 8 direções vizinhas.
c) não há explosões, a lava sai e escorre apenas pela ação da gravidade quando possível.
d) a cada erupção, a cratera aparece em um local distinto da ilha.
Você, como estagiário de geologia, recebeu a incumbência de escrever um programa que:
a) leia uma matriz NxN, que representa as alturas médias dos platôs da ilha (cada platô tem 1 $hectometro^2$, 1 hm=100m) em hm, em relação ao nivel do mar. Assim, se na posição 2,2 houver o valor 3, isto indicará que neste hectômetro

quadrado a altura média é de 300m em relação ao mar.
b) leia uma posição x,y representando a localização da cratera, nesta erupção. Essa localização já está na modalidade desejada, ou seja, variando entre 0 e N-1. Especial cuidado deve ser tomado para o caso em que a cratera já esteja na margem da ilha. Neste caso ela poderá não ter alguns dos 8 vizinhos.

Sabe-se que a lava flui apenas do platô cratera para os platôs vizinhos se estes tiverem uma quota menor (forem menos altos), e que a lava vaza para os 8 vizinhos (nas direções N, NE, E, SE, S, SO, O e NO) à velocidade de 1 platô/hora.

Quando a lava chega nos limites da ilha, ela cai no mar e deixa de ter relevância para este problema.

Supondo que a erupção ocorre às 14hr, seu programa deve calcular e imprimir quantos hectômetros quadrados foram cobertos de lava após 1 hora da erupção, ou seja as 15h00. Deve imprimir também qual a altura mínima da lava nesta hora, em relação ao nivel do mar. Note que a quantidade de platôs da resposta deve variar entre 1 (só a cratera) e 9 (A cratera e seus 8 vizinhos).

Para seu entendimento, suponha uma ilha com a configuração

```
1 1 7 8 2 2        Aqui:
2 2 3 4 1 9        crat=4.0 => p=1 m=3
3 3 5 5 6 7   2,2      5   2
4 5 6 7 8 2   3,3      8   4
3 3 4 5 6 7   5,5      1   1
3 4 5 2 2 1
```

```
  i=0
  platos=sommin=0
  while i<20:
    for ii in range(10):
      x=f.readline()
      nums=x.split()
      for jj in range(10):
 m[ii,jj]=int(nums[jj])
    x=f.readline()
    nums=x.split()
    xx=int(nums[0])-1
    yy=int(nums[1])-1
    qtd=0
    minimo=+999999
    for ii in range(xx-1,xx+2):
      for jj in range(yy-1,yy+2):
 if ii>=0 and ii<10 and jj>=0 and jj<10:
 if m[ii,jj]<m[xx,yy]:
   qtd=qtd+1
 if (ii!=xx or jj!=yy) and m[ii,jj]<minimo:
   minimo=m[ii,jj]
    platos=platos+qtd
    sommin=sommin+minimo
    i=i+1
  print("Vulcao = ",platos," Minimos = ",sommin)
```

**O truque:** Achar os vizinhos de um determinado elemento em uma matriz. Basta subtrair e acrescentar 1 unidade (ou mais, se forem vizinhos mais distantes) nos índices dos elementos a processar. Especial cuidado deve ser tomado nos limites da matriz. O número de vizinhos só é total nos elementos centrais da matriz, ou seja, aqueles que não estão em nenhuma borda.

**Sequencia de Fibonacci** Os historiadores da matemática quase garantem que a disseminação dos algarismos arábicos (e também do zero, este de origem hindu) na cultura ocidental, vem do livro de Fibonacci, Liber Abacci publicado na Itália por volta de 1220.

Na nossa matemática contemporânea, o Fibonacci está associado à célebre sequência de números: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,... na qual os dois primeiros termos valem 1 e 1 e a partir do terceiro, cada elemento é igual à soma dos dois anteriores.

Neste exercício, você está sendo convidado a desenvolver um gerador de sequências de Fibonacci genérico. A diferença é que os 2 primeiros termos da sequência serão variáveis, embora a regra de construção dos elementos além do segundo permaneça a mesma, isto é, a soma dos dois anteriores.

Eis alguns exemplos destas sequências genéricas:

```
2,7,9,16,25,41,...
3,7,10,17,27,44,71,115,...
```

```
100,200,300,500,800,1300,2100,3400,...
123,456,579,1035,1614,2649,4263,...
```

Você deve escrever um programa e nele deve escrever uma função de nome fibonacci(), que receba 3 parâmetros: a saber (a,b,q) a é o primeiro termo, b o segundo termo, e q é a ordem do elemento que deve ser calculado. Por exemplo, se q=3 então é o terceiro a ser calculado, se q=7 é o sétimo e em termos genéricos é o q-ésimo termo.

O programa principal deve receber uma quantidade indeterminada de triplas a,b,q e para cada uma calcular os termos de fibonacci pedidos através do parâmetro q.

Note que além de devolver o q-ésimo termo, a função retornar também o termo anterior (o de ordem q-1), já que ambos deverão ser impressos.

```
Exemplos de uso:
Informe a, b e q: 1 1 7
Termo q-1: 8    -    Termo q: 13
Informe a, b e q: 2 7 6
Termo q-1: 25    -   Termo q: 41
Informe a, b e q: 3 7 7
Termo q-1: 44   -    Termo q: 71
Informe a, b e q: 123 456 5
Termo q-1: 1035 -    Termo q: 1614
Informe a, b e q: 0,0,0
```

```
def fibo(a,b,qual):
  i=3
  while i<=qual:
    res=a+b
    a=b
    b=res
    i=i+1
  return [a,b]

...
  i=somq=somqm=0
  while i<200:
    x=f.readline()
    nums=x.split()
    a=int(nums[0])
    b=int(nums[1])
    qual=int(nums[2])
    zz=fibo(a,b,qual)
    somq=somq+zz[1]
    somqm=somqm+zz[0]
    i=i+1
  print(somqm,somq)
```

**Operações com conjuntos** Imagine uma matriz de 6 linhas por 13 colunas, na qual:
cada linha corresponde a um conjunto de até 12 números. O primeiro elemento de cada linha não é um elemento e sim um contador de elementos válidos naquela linha. As 3 primeiras linhas correspondem aos conjuntos $A$, $B$ e $C$ e já vêm preenchidas. As outras linhas correspondem aos conjuntos $D$, $E$ e $F$ e devem ser calculados pelo programa, usando as seguintes regras:
$D = A \cap B$, $E = D \cup C$ e $F = B \cap C$. Escreva um programa C++ que leia uma matriz deste tipo, atualize as linhas 4..6 e imprima a matriz completa.

```
...
```

**Truques:** O primeiro é o conceito de conjunto que elementos nos quais: i. não pode haver repetição de elementos e ii. A ordem dos elementos não interessa. Adicionalmente, a operação de intersecção ($\cap$) devolve elementos que estão no primeiro e no segundo conjuntos. A união ($\cup$) recupera elementos que estão no primeiro ou no segundo conjuntos.

Um truque adicional é contador de elementos válidos. É usado quando se simula um conjunto de tamanho variável (o conjunto) sobre uma estrutura de dados de tamanho fixo (a linha da matriz).

```
def f187():
  f=open("c:/p/n/187/f187001_exemplo.myd","r")
  i=ctdd=ctde=ctdf=0
```

```
  while i<40:
    m=np.zeros((6,13),int)
    for ii in range(6):
      x=f.readline()
      nums=x.split()
      for jj in range(13):
m[ii,jj]=int(nums[jj])

    idd=1
    iee=1
    for iaa in range(1,m[0,0]+1):
      for ibb in range(1,m[1,0]+1):
if m[0,iaa]==m[1,ibb]:
m[3,idd]=m[0,iaa]
m[4,idd]=m[0,iaa]
idd=idd+1
iee=iee+1
m[3,0]=m[3,0]+1
m[4,0]=m[4,0]+1
    for icc in range(1,m[2,0]+1):
      tem=0
      for idd in range(1,m[3,0]+1):
if m[2,icc]==m[3,idd]:
tem=1
      if tem==0:
m[4,iee]=m[2,icc]
iee=iee+1
m[4,0]=m[4,0]+1
    iefe=1
    for ibb in range(1,m[1,0]+1):
      for icc in range(1,m[2,0]+1):
if m[1,ibb]==m[2,icc]:
m[5,iefe]=m[1,ibb]
iefe=iefe+1
m[5,0]=m[5,0]+1
    ctdd=ctdd+m[3,0]
    ctde=ctde+m[4,0]
    ctdf=ctdf+m[5,0]
    i=i+1
  print("D=",ctdd," E=",ctde," F=",ctdf)
```

**Determinante** O determinante de uma matriz quadrada é um número real que informa algumas características da matriz e que pode e é usado em diversos processamentos sobre a matriz. O determinante de uma matriz $1 \times 1$ contendo um único valor é o próprio valor. Já uma matriz $2 \times 2$ tem como determinante a expressão $a.d - b.c$. Uma matriz $3 \times 3$ tem como determinante a expressão (tirada da regra de Sarrus) $aei + dhc + bfg - (gec + ahf + dbi)$. Para as ordens maiores, existe uma regra (recursiva) que vai ser adotada aqui. Para calcular o determinante de uma matriz de ordem 4, escolhe-se uma linha (ou coluna) qualquer e para todo elemento $m[i,j]$ dessa linha, calcula-se a expressão $m[i,j] \times (-1)^{i+j} \times det(m')$ onde $m'$ é a matriz resultante quando se extrai de m a linha $i$ e a coluna $j$.

```
def tira(x,qual):
  ta=len(x)-1
  z=np.zeros((ta,ta),int)
  i=k=0
  while i<len(x):
    if i==qual:
      i=i+1
      continue
    for j in range(1,len(x)):
      z[k,j-1]=x[i,j]
    k=k+1
    i=i+1
  return z
```

```
def det(m):
  if len(m)==3:
    x=(m[0,0]*m[1,1]*m[2,2])+(m[1,0]*m[2,1]*
       m[0,2])+(m[0,1]*m[1,2]*m[2,0])
    y=(m[2,0]*m[1,1]*m[0,2])+(m[0,0]*m[2,1]*
       m[1,2])+(m[1,0]*m[0,1]*m[2,2])
    return x-y
  else:
    x=0
    i=0
    while i<len(m):
      z=tira(m,i)
      y=det(z)
      if ((1+i)%2)==0:
 x=x+m[i,0]*-1*y
      else:
 x=x+m[i,0]*y
      i=i+1
    return x
int main() {
  float m[N][N];
  int i,j;
  fstream f;
  float x;
  f.open("c:/p/n/....txt");
  for (i=0;i<N;i++){
    for (j=0;j<N;j++){
       f>>m[i][j];
    }
  }
  for (i=0;i<N;i++){
    for (j=0;j<N;j++){
       cout<<setw(5)<<m[i][j];
    }
    cout<<endl;
  }
  x=det(m,N);
  cout<<"Determinante = "<<x;
}
```

**Truque: recursividade** Como a definição de determinante usa a recursividade (a solução de um determinante 4 é igual a 3 vezes a solução de um determinante 3...), tem-se o ambiente ideal para a recursividade: i.mesma solução, ii. universo menor e iii. caso básico (det=3).

**Ponto central** Este problema surge em diversos contextos (ainda mais nos dias de hoje, com a popularização da geo-localização e georeferência via GPS). Trata-se de uma coleção arbitrária de pontos, devendo-se escolher o ponto central do conjunto. A definição formal sugere escolher o ponto que tiver o menor raio de cobertura a todos os demais. Trocando em miúdos, para cada ponto deve-se calcular a distância ao mais distante. O ponto que tiver o menor maior raio é o centro.
**Truque:** Usa-se aqui o Teorema de Pitágoras para descobrir distâncias, já que estas sempre ou quase sempre virão na forma de coordenadas $x, y$ o que sugere imediatamente um triângulo retângulo.

```
def f188():
  f=open("c:/p/n/188/f188001_ex2.myd","r")
  ctd=0
  i=0
  maximo=np.zeros(10,float)
  raios=np.zeros(10,float)
  while i<50:
    pts=np.zeros((10,2),int)
    alfa=f.readline()
```

```
    nums=alfa.split()
    for j in range(10):
      pts[j,0]=float(nums[j])
    alfa=f.readline()
    nums=alfa.split()
    for j in range(10):
      pts[j,1]=float(nums[j])
    for ii in range(10):
      for jj in range(10):
 raios[jj]=pitag(pts[ii,0],
  pts[ii,1],pts[jj,0],pts[jj,1])
      maximo[ii]=-9999999999999.0
      for jj in range(10):
 if raios[jj]>maximo[ii]:
 maximo[ii]=raios[jj]
    menor=9999999999999.0
    for ii in range(10):
      if maximo[ii]<menor:
 menor=maximo[ii]
 imenor=ii
    ctd=ctd+imenor+1
    i=i+1
  print("So= ",ctd)
```

**Histograma** Um histograma é uma representação gráfica de algum fenômeno. Feito em colunas, cada uma delas é associada ao valor numérico de alguma medida e a comparação visual imediatamente dá uma boa idéia do comportamento do fenômeno.

Veja-se uma definição: Escreva um programa em Python para ler um vetor de inteiros de tamanho N que representa um histograma normalizado, com valores variando de 1 a N. O histograma é uma representação gráfica em colunas dos valores do vetor, ou seja, uma distribuição de frequências. Seu programa deve imprimir o histograma a partir do vetor de entrada, conforme exemplos abaixo.

```
Exemplo de execução (com N=5):
Digite vetor:
1 2 3 4 5
Histograma:
 @
      @ @
    @ @ @
  @ @ @ @
@ @ @ @ @

Digite vetor:
1 2 5 2 1
Histograma:
    @
    @
    @
  @ @ @
@ @ @ @ @
```

```
  v=[0]*100
  i=ctb=0
  while i<50:
    x=f.readline()
    nums=x.split()
    v[0]=int(nums[0])
    for z in range(v[0]):
      v[z+1]=int(nums[z+1])
    for ii in range(v[0]):
      for j in range(v[0]):
 if v[j+1]<(v[0]-ii):
```

```
ctb=ctb+1
   i=i+1
 print("qtd brancos=",ctb)
```

**O truque:** É imprimir um gráfico a partir de informações numéricas. A solução aqui é imaginar o espaço no papel como uma matriz, que pode ser preenchida com espaço ou com algum caracter, a depender de alguma condição.

**Xadrez** O xadrez é um universo riquíssimo, inclusive no mundo da programação. Há inúmeras coisas que podem ser programadas nesse universo. Veja-se aqui uma definição: O xadrez é jogado em um tabuleiro quadriculado 8 x 8 de casas brancas e pretas alternadas, sendo que a casa superior esquerda (linha 0, coluna 0) é branca. No xadrez, um jogador controla as peças brancas e o outro as pretas. Embora o objetivo seja capturar o rei adversário, é comum atribuir pontos às peças que cada jogador tem no tabuleiro a fim de estabelecer uma medida de desempenho do jogador. A seguinte pontuação é utilizada: peão: 1, cavalo: 3, bispo: 3, torre: 5, dama: 9, rei: 0. Considere um método de pontuação que contabilize apenas os pontos das peças que têm A MESMA COR da casa em que está no tabuleiro. Por exemplo, um bispo preto em uma casa branca tem valor 0 ao invés de 3, enquanto uma torre branca em uma casa branca possui a pontuação normal de 5. A figura abaixo mostra uma situação de jogo na qual o jogador de brancas tem 22 pontos e o jogador de pretas tem 23 pontos.

Faça um programa que contabilize os pontos de cada jogador. Seu programa deve ler uma matriz 8x8 representando uma configuração do tabuleiro de xadrez onde cada elemento é um número inteiro que pode ser 0, indicando que não há peça naquela posição, ou um número de 2 dígitos onde o primeiro dígito indica a cor da peça que lá está (1 se for branca e 2 se for preta) e o segundo dígito indica o valor da peça. Por exemplo, 13 indica que naquela posição há um cavalo/bispo branco, já o número 20 indica que a posição tem o rei preto, e assim por diante.

Seu programa deve calcular a pontuação do jogador de brancas e do jogador de pretas e mostrar essa pontuação. Lembre-se que a casa inferior direita de cada jogador é branca.

```
25  0  0  0  0 25 20  0
21  0 29 23 23 21 21 21
 0 21 21 23 21  0  0  0
 0  0  0  0  0 23  0  0
 0  0 19 11  0  0  0  0
 0  0 13  0 11 13 13  0
11 11  0  0 13 11 11 11
 0  0 15  0 10  0  0 15
Pontuacao Brancas: 22
Pontuacao Pretas: 23
```

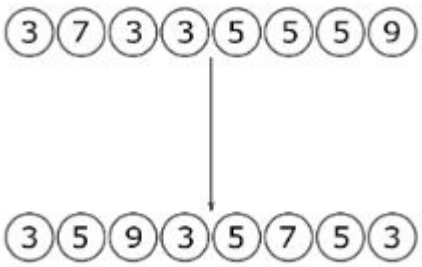
```
  t=np.zeros((8,8),int)
  i=spb=spn=0
  while i<100:
    for jj in range(8):
      x=f.readline()
      nums=x.split()
      for kk in range(8):
 t[jj,kk]=int(nums[kk])
    pb=pn=0
    for ii in range(8):
      for jj in range(8):
 cor=t[ii,jj]//10
 pec=t[ii,jj]%10
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
 if ((ii+jj)%2)==0 and cor==1:
 pb=pb+pec
 if ((ii+jj)%2)==1 and cor==2:
 pn=pn+pec
    spb=spb+pb
    spn=spn+pn
    i=i+1
  print("SPB=",spb,"    SPN=",spn)
```

**Bolas trocadas** Este exercício trazido da Olimpíada Brasileira de Informática pede que você leia 8 bolas e tente trocá-las de lugar de modo que duas bolas vizinhas não tenham o mesmo número. com a palavra o site da OBI:

Temos oito bolas, colocadas lado a lado em uma sequência. Cada bola tem um número impresso, que pode ter valor de 0 até 9. Queremos trocar algumas bolas de posição na sequência de modo que nenhum par de bolas vizinhas na sequência tenha o mesmo número. Quer dizer, não pode haver duas bolas, uma ao lado da outra, com o mesmo número. A figura ao lado mostra um exemplo para o qual isso foi possível. Mas será que sempre é possível? Seu programa deve decidir se é ou não possível obter uma sequência em que não haja bolas vizinhas com o mesmo número.




**Entrada** A única linha da entrada contém uma sequência de oito inteiros $B_i$, para $1 \leq i \leq 8$, representando os números impressos em cada bola da sequência.

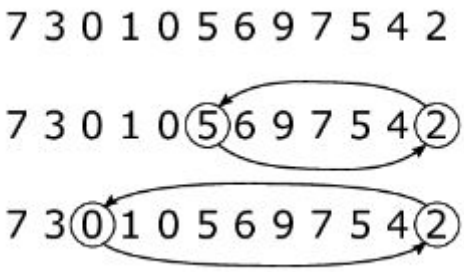
**Saída** Imprima uma linha contendo o caractere "S"se for possível trocar bolas de posição e obter a sequência sem bolas vizinhas com o mesmo número; ou o caracter "N"se não for possível.

**Restrições** $B_i$ é um inteiro entre 0 e 9, inclusive.

**Exemplos**

```
Entrada
3 7 3 3 5 5 5 9
Saída
S

Entrada
8 3 8 8 8 8 8 0
Saída
N
```

**Cinco** Considere um número decimal não divisível por 5. Queremos fazer exatamente uma operação de troca entre os dígitos de duas posições distintas para obter um número que seja divisível por 5. Quer dizer, precisamos escolher duas posições distintas e trocar os dígitos dessas duas posições. Mas queremos que o número resultante após a troca seja o maior número divisível por 5 possível.



Veja o exemplo da figura, 730105697542, que não é divisível por 5. Podemos fazer a primeira troca ilustrada e obter 730102697545, que é divisível por 5. Mas, se fizermos a segunda troca ilustrada na figura, vamos obter um número divisível por 5 ainda maior, 732105697540.

Dados os dígitos decimais de um número na entrada, não divisível por 5, seu programa deve imprimir os dígitos decimais do maior número divisível por 5 que pode ser obtido com exatamente uma troca de dígitos entre duas posições distintas. Caso não seja possível obter um número divisível por 5, imprima apenas -1.

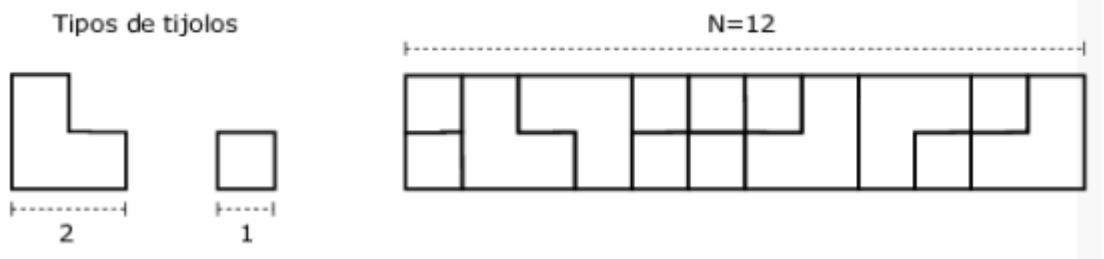
**Entrada** A primeira linha da entrada contém um inteiro N, indicando quantos dígitos decimais tem o número não divisível por 5. A segunda linha contém N inteiros $D_i, 1 \leq i \leq N$, representando os dígitos decimais do número em questão.

**Saída** Imprima uma linha contendo N inteiros representando os dígitos decimais do maior número divisível por 5 que pode ser obtido com exatamente uma troca de dígitos entre duas posições distintas. Caso não seja possível obter um número divisível por 5, imprima apenas -1.

**Restrições** $2 \leq N \leq 1000$ e $D_i$ é um inteiro entre 0 e 9, inclusive.

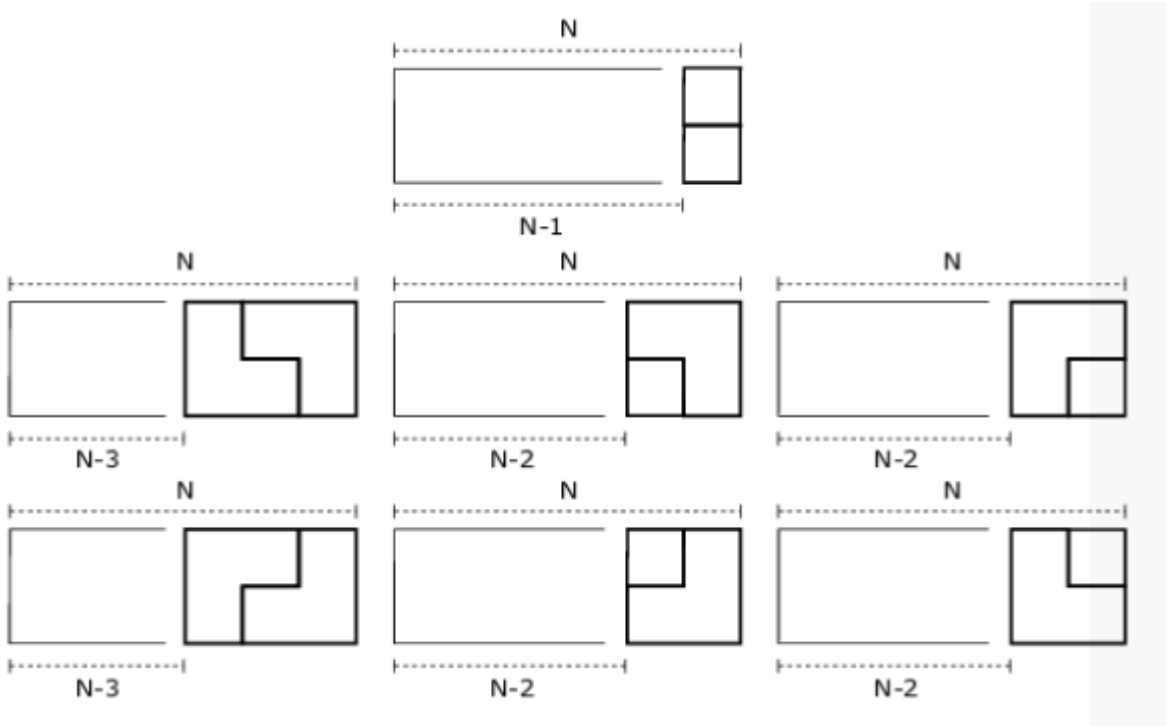
```
Exemplos
Entrada
12
7 3 0 1 0 5 6 9 7 5 4 2
Saída
7 3 2 1 0 5 6 9 7 5 4 0

Entrada
5
7 4 1 2 9
Saída
-1

Entrada
8
0 0 7 8 4 5 3 1
Saída
1 0 7 8 4 5 3 0

Entrada
10
6 5 0 5 0 4 5 3 4 4
Saída
6 5 4 5 0 4 5 3 4 0

Entrada
7
9 7 4 5 3 5 2
Saída
9 7 4 5 3 2 5
```

**Muro** Com a palavra a OBI: Nós temos dois tipos de tijolos, como mostrado na parte esquerda da figura abaixo. A ideia é construir uma mureta de altura 2 e comprimento N. A parte direita da figura ilustra uma forma de usar os dois tipos de tijolos para construir uma mureta de comprimento N=12.




Precisamos saber quantas formas distintas existem de construir a mureta com esses dois tipos de tijolos. Para isso, já temos duas observações: qualquer mureta de comprimento N vai terminar de uma das sete maneiras ilustradas abaixo e; o número de formas distintas de construir uma mureta de comprimento 2, 1 e 0 é, respectivamente, 5, 1 e 1 (sim! Existe uma forma de construir a mureta de comprimento 0: usar nenhum tijolo).

 ©75-18, Pedro Kantek




Dado N, seu programa deve computar o número de formas distintas de construir uma mureta de comprimento N. Como esse número pode ser muito grande, seu programa deve imprimir o resto da divisão dele por $10^9 + 7$.

**Entrada** A única linha da entrada contém um inteiro N, representando o comprimento da mureta.

**Saída** Imprima uma linha contendo um inteiro, o número de formas distintas de construir a mureta com os dois tipos de tijolos. Imprima o resto da divisão desse número por $10^9 + 7$.

**Restrições** $0 \leq N \leq 10^4$.

```
Exemplos
Entrada
2
Saída
5
Entrada
11
Saída
36543
Entrada
6
Saída
241
Entrada
0
Saída
1
Entrada
8712
Saída
844673301
```

```
d={0:1, 1:1, 2:5}
def muro(n):
  aa=d.get(n)
  if aa is None:
    d[n]=(muro(n-1)+4*muro(n-2)+2*muro(n-3))%(10**9+7)
    return d[n]
  else:
    return aa
print(muro(61))
```

**Dica** Este é um problema de combinatória que pode ser resolvido usando-se relações de recorrência. Note que se você tiver um muro de comprimento $N$, ele poderá ser construído juntando-se um muro de comprimento $N-1$ a um conjunto

de 1 tijolos. Outra possibilidade é juntar uma das 4 possibilidades de 2 tijolos ao lado de um muro de comprimento $N-2$. E finalmente, há a possibilidade de juntar um muro de $N-3$ a uma das 2 possibilidades. Daqui:

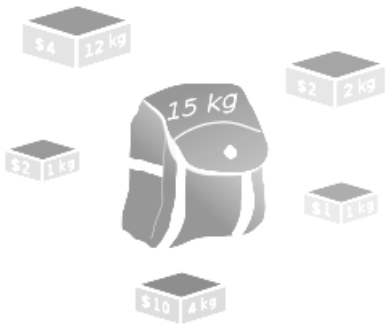
$$F_N = F_{N-1} + 4 \times F_{N-2} + 2 \times F_{N-3}$$

. Dos dados acima: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 5$, e agora
$F_3 = F_2 + 4F_1 + 2F_0 = 5 + 4 + 2 = 11$
$F_4 = F_3 + 4F_2 + 2F_1 = 11 + 20 + 2 = 33$
$F_5 = F_4 + 4F_3 + 2F_2 = 33 + 44 + 10 = 87$
$F_6 = F_5 + 4F_4 + 2F_3 = 87 + 132 + 22 = 241$
Note que se você quiser estudar estes 241 possibilidades o professor tem um mapa com todas elas.

## 13.15 Mochila 240a

O problema da mochila (em inglês, Knapsack problem) é um problema de otimização combinatória. O nome é devido ao modelo de uma situação em que é necessário preencher uma mochila com objetos de diferentes pesos e valores. O objetivo é que se preencha a mochila com o maior valor possível, não ultrapassando o peso máximo.

O problema da mochila é um dos 21 problemas NP-completos de Richard Karp, exposto em 1972. A formulação do problema é extremamente simples, porém sua solução é mais complexa.




Normalmente este problema é resolvido com programação dinâmica, obtendo então a resolução exata do problema. Foi possivelmente reportado pela primeira vez na literatura por Dantzig (1957) e constitui um marco das técnicas de programação inteira, otimização combinatória e programação dinâmica.

Podemos definir o problema matematicamente da seguinte forma:

Dados vetores $x[1..n]$ e $w[1..n]$, vamos denotar por $x.w$ o produto escalar de $x$ por $w$:

$$x.w = x[1]w[1] + ... + x[n]w[n]$$

Suponha dado um número positivo ou nulo $W$ e vetores $w[1..n]$ e $v[1..n]$ com componentes positivos ou nulos. Uma mochila é qualquer vetor $x[1..n]$ tal que

$x.w \leq W$ e $0 \leq x[i] \leq 1$ para todo $i$

O valor de uma mochila é o número $x \times v$. Uma mochila é ótima se tem valor máximo.

Imagine que você possui um contêiner de certo tamanho e vários produtos com seus valores para serem colocados dentro dele. Porém os produtos devem ser colocados de um jeito que o contêiner tenha o maior valor.

Suponha que você tenha em sua máquina uma pasta cheia de arquivos e deseja gravá-los em CD, só que você já sabe de antemão que não vai caber tudo num CD só. Podem ser dois, três... dez CD's. Como proceder para encaixar o máximo de arquivos em cada CD desperdiçando o mínimo espaço em cada disco?

Desses exemplos podemos entender que a motivação do problema da mochila é colocar dentro de um compartimento uma quantidade de objetos com determinadas importâncias para que esse compartimento tenha a maior importância possível.

O modelo em si pode ser aplicado, além nos exemplos citados acima, em casos como: Investimento de capital, corte e empacotamento, carregamento de veículos, orçamento.

Foi também utilizado para a construção do algoritmo de Criptografia de chave pública, onde no contexto do problema da mochila a chave pública seria o peso total que o mochila pode carregar e a partir dai, por essa palavra a encriptação é gerada.

Por ser um problema combinatório é possivel resolve-lo por enumeração exaustiva, ou seja tentar todas as soluções possiveis e comparando-as para identificar a melhor solução. Porém, obter todos os subconjuntos de um conjunto dado tem complexidade de $O(2^n)$. Esta abordagem pode tornar completamente inviável a solução uma vez que, mesmo em pequenas dimensões como um problema com apenas 20 itens, haveria um numero enorme de respostas. Em um problema com mais de 80 itens, o algoritmo levaria bilhões de anos para ser concluido. Assim, o método de resolução por enumeração exaustiva é de utilidade muito reduzida, senão mesmo nula, para problemas reais.

Outras estratégias são o *backtracking* (enumeração inteligente através da construção de uma árvore), o *método guloso* (é um macete que sempre escolhe a melhor alternativa. É rápido, mas nem sempre dá certo). A estratégia a ser usada aqui é a da programação dinâmica.

É um método aprimorado de usar recursividade que ao invés de chamar uma função várias vezes ele, na primeira vez que é chamado, armazena o resultado para que cada vez que a função for chamada novamente volte o resultado e não uma requisição para ser resolvida.

Exemplo: Suponha $W = 50$ e $n = 4$. A figura abaixo dá os valores de $w[1..4]$ e $v[1..4]$. Mais abaixo, temos uma solução $x[1..4]$ do problema fracionário e uma solução $x'[1..4]$ do problema booleano. O valor da mochila fracionária é $x.v = 1040$. O valor da mochila booleana é $x'.v = 1000$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| w | 40 | 30 | 20 | 10 |
| v | 840 | 600 | 400 | 100 |
| x | 1 | 0.333 | 0 | 0 |
| x' | 0 | 1 | 1 | 0 |

**Algoritmo** O problema da mochila booleana pode ser resolvido por um algoritmo de programação dinâmica [CLR 17.2-1] que consome $O(nW)$ unidades de tempo. Mas isso só é possível se $W$ e $w[1...n]$ são todos inteiros não-negativos.

O consumo $O(nW)$ é bem melhor que o do algoritmo recursivo, mas não é nenhuma maravilha, porque é proporcional a $W$.

A tabela t contém as soluções das instâncias do problema. A tabela é definida assim:

$t[i, Y]$ é o valor máximo da expressão $x[1..i].v[1..i]$ sujeita à restrição $x[1..i].w[1..i] \leq Y$.

Em português de gente, t[i][j] contém o valor da mochila composta pelos melhores $i$ primeiros produtos, cujo peso é menor ou igual a $j$.

Os possíveis valores de $Y$ são $0, 1, ..., W$ (É claro que isso só funciona porque estamos supondo W inteiro) e os possíveis valores de i são $0, 1, ..., n$. É importante que 0 seja um possível valor de Y e de i. Por exemplo, se w[1]=0 então t[1,0]=v[1].

Pode-se ver que t[0,Y]=0 para todo Y. Se $i > 0$ então $t[i, Y] = A$ se $w[i] > Y$ e $t[i, Y] = max(A, B)$ se $w[i] \leq Y$,

onde $A = t[i - 1, Y]$ e $B = t[i - 1, Y - w[i]] + v[i]$. Traduzindo para o português:

Se a mochila ótima para 1..i não usa i então ela é também uma mochila ótima para 1..i-1. Se a mochila ótima para 1..i usa i então ela é o resultado de juntar i com uma mochila ótima para 1..i-1.

A partir dessa recorrência é possível escrever um algoritmo de programação dinâmica para determinar $t$ e o vetor $x$:

```
Mochila-Booleana (w, v, W)
n ← dimensão de w
for Y ← 0 até W do
  t[0][Y] ← 0
  for i ← 1 até n do
    A ← t[i-1][Y]
    if w[i] > Y then
      B ← 0
    else
      B ← t[i-1][Y-w[i]]+v[i]
    end if
    t[i][Y] ← max(A,B)
  end for
end for
Y ← W
for i ← n decrescendo até 1 do
  if t[i][Y] = t[i-1][Y] then
    x[i] ← 0
  else
    x[i] ← 1
    Y ← Y-w[i]
  end if
end for
devolva x, t[n][W]
```

Exemplos:

```
w=1 5 1 1 6 6 8 8;v=2 21 3 13 13 11 19 4;W=14
x=0 1 0 1 0 0 1 0;Y=53

w=1 3 4 2 4 2 3 3;v=2 14 13 17 21 22 22 9;W=13
x=1 0 0 1 1 1 1 0;Y=84

w=7 4 7 8 4 3 4 4;v=3 5 5 17 7 16 23 4;W=15
x=0 0 0 1 0 1 1 0;Y=56
```

Uma possível solução

```
def f240(w,v,W):
    import numpy
    print('--------------------------------------')
    print('w= ',w)
    print('v= ',v)
    print('W= ',W)
    w=[0]+w
    v=[0]+v
    t=numpy.zeros((len(w),100))
    x=[-1]*len(w)
    Y=0
    while Y<=W:
 t[0][Y]=0
 i=1
 while i<len(w):
   A=t[i-1][Y]
   if w[i]>Y:
       B=0
   else:
       B=t[i-1][Y-w[i]]+v[i]
   if A>=B:
       t[i][Y]=A
   else:
       t[i][Y]=B
   i=i+1
 Y=Y+1
    Y=W
    i=len(w)-1
    while i>=1:
 if t[i][Y]==t[i-1][Y]:
   x[i]=0
 else:
   x[i]=1
   Y=Y-w[i]
 i=i-1
    print(x[1:],t[len(w)-1][W])
    print('Conteudo da mochila =     Peso')
    for i in range(1,len(x)):
 if x[i]==1:
   print(w[i],end=' ')

    print('\nConteudo da mochila =     valor')
    for i in range(1,len(x)):
 if x[i]==1:
   print(v[i],end=' ')
    print('\n')
w=[1,5,1,1,6,6,8,8]
v=[2,21,3,13,13,11,19,4]
W=14
f240(w,v,W)
w=[1,3,4,2,4,2,3,3]
v=[2,14,13,17,21,22,22,9]
W=13
f240(w,v,W)
w=[7,4,7,8,4,3,4,4]
v=[3,5,5,17,7,16,23,4]
W=15
f240(w,v,W)
```

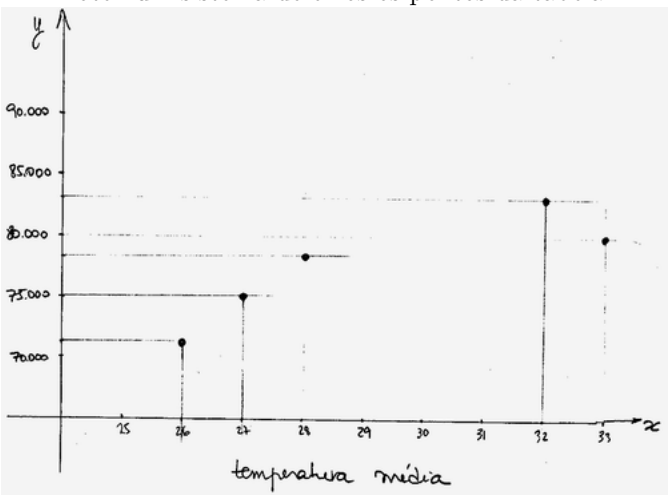
 ©75-18, Pedro Kantek

## 13.16 Mínimos quadrados

A Companhia Sonhos gelados produz e comercializa sorvetes. Ela resolveu analisar a temperatura média do verão nos últimos anos e o volume de vendas nessa mesma estação. Uma amostra é apresentada:

| temperatura($^o$C) | 32 | 28 | 33 | 27 | 26 |
|---|---|---|---|---|---|
| Vendas (mil) | 83 | 78 | 80 | 75 | 71 |

**1.** Plote num sistema de eixos os pontos da tabela




**2.** Determine a equação da reta que melhor se ajusta

As equações normais do problema cujas incógnitas são $a$ e $b$ na equação $y = a + bx$, são

$$na + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

e

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Neste caso, tem-se:

| | | |
|---|---|---|
| $n$ | = | 5 |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i$ | = | 146 |
| $\sum_{i=1}^{n} y_i$ | = | 387 |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ | = | 4302 |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ | = | 11351 |

E fica o sistema

$$5a + 146b = 387$$

$$146a + 4302b = 11351$$

Da primeira equação fica $a = 77,4 - 29.2b$. Levando este valor na segunda equação, fica

$$38,8b = 50,6$$

ou

$$b = 1,30$$

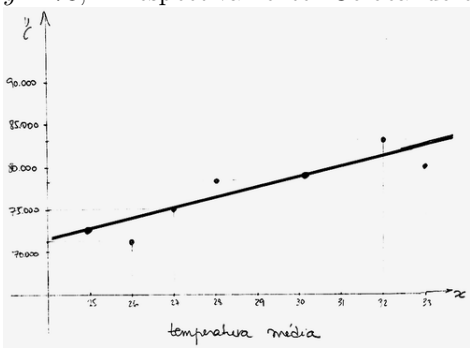
. Retornando à primeira equação para obter o valor de $a$, tem-se $a = 39,44$.

Retornando às equações normais, fica:

$$y = 39,44 + 1,30x$$

**3.** Esboce a reta obtida

Para tanto, escolheram-se 2 pontos de abcissas $x = 25$ e $x = 30$. As ordenadas correspondentes são $y = 71,94$ e $y = 78,44$ respectivamente. Colocando estes dois novos pontos no gráfico, ficou:




**Solução** A teoria que se propõe a resolver este problema é o chamado Método dos mínimos quadrados. No caso em particular, busca-se uma reta, de fórmula $y = a + bx$, onde $a$ e $b$ são os parâmetros a determinar. Busca-se minimizar a distância de cada ponto $(x_i, y_i)$ da tabela dada a cada ponto $(X_i, a + bx_i)$ da reta.

Construindo uma tabela com os dados do problema e nomeando-os como segue, fica

| | | |
|---|---|---|
| $n$ | $=$ | $N$ |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i$ | $=$ | $J$ |
| $\sum_{i=1}^{n} y_i$ | $=$ | $K$ |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ | $=$ | $L$ |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ | $=$ | $M$ |

Reescrevendo as equações normais da reta $y = a + bx$, usando os símbolos acima, fica:

$Na + Jb = K$ (eq. 1) e

$Ja + Lb = M$ (eq. 2)

Multiplicando a eq.1 por J e a eq.2 por N, fica:

$JNa + J^2b = KJ$ (eq. 3) e

$JNa + LNb = NM$ (eq. 4)

multiplicando a eq.4 por -1 e somando as duas, fica:

$(J^2 - LN)b = KJ - NM$ (eq.5) ou

$b = \frac{KJ-NM}{J^2-LN}$ (eq.6) que permite encontrar o valor de $b$.

Levando este valor à eq.3 e simplificando uma ocorrência de $J$, fica:

$a = \frac{KJ-J^2b}{JN} = \frac{K-Jb}{N}$ (eq.7) obtem-se o valor de $a$, o que permite reconstruir a equação da reta procurada. Agora pode-se extrapolar quaisquer ponto desejado, bastando colocar o valor de $x$ desejado na reta, e a seguir calcular o valor de $y$ esperado.

Para testar o formulário acima experimente calcular $a$ e $b$ do exercício inicial usando as fórmulas 6 e 7. Veja como funciona.

**O algoritmo** Dada uma série de valores de $x$ e de $y$, calcula-se as somas $J = (\sum x)$, $K = (\sum y)$, $L = (\sum x^2)$, $M = (\sum xy)$ e $N = n$ e daí:

```
1: função MINQUA
2: IND,J,K,L,M,N,X,Y,CT:inteiro
3: VX,VY: vetor [1..1000] de inteiro
4: A,B:real
5: leia (X)
6: CT ← 0
7: while X ≠ -1 do
8:    CT ← CT + 1
9:    VX[CT] ← X
10:   escreva ("digite o par de ",X)
11:   leia (Y)
12:   VY[CT] ← Y
13:   escreva ("digite mais um X ou -1 para encerrar")
14:   leia (X)
15: end while
16: J ← K ← L ← M ← N ← 0
17: for IND=1; IND < CT; IND++ do
18:   J ← J + VX[IND]
19:   K ← K + VY[IND]
20:   L ← L + VX[IND]^2
21:   M ← M + VX[IND] × VY[IND]
```

 ©75-18, Pedro Kantek

22: N ← N + 1
23: **end for**
24: B ← $\frac{KJ-NM}{J^2-LN}$
25: A ← $\frac{K-JB}{N}$
26: leia (X)
27: **while** X ≠ −1 **do**
28: Y ← $A + B \times X$
29: escreva (Y)
30: leia (X)
31: **end while**

**Para testar** o algoritmo implementado, faça:

```
x = 26 31 33 36 38 41 42 44
y = 40 41 45 49 51 55 56 58
a = 9.249642005 e b = 1.103102625
para x = 45, y = 58.88  e para x = 50, y = 64.40
```

## 13.17 Recursividade: passeio cavalo, caixeiro viajante, hanoi

**Passeio do Cavalo** Uma tarefa comum em programação é a busca da solução geral de um problema. Uma estratégia possível (apenas usando computadores) é testar todas as possibilidades mediante o método da tentativa e erro. O caminho mais comum é se decompor a tarefa em sub-tarefas e em geral estas tarefas são muito bem descritas em termos recursivos. Vejamos um exemplo da técnica. Seja um cavalo disposto em um tabuleiro de xadrez de $n \times n = n^2$ casas. (O tabuleiro convencional $8 \times 8$ é um caso particular deste mais geral). O cavalo é inicialmente disposto na posição $x_0, y_0$, e usando os movimentos usuais do xadrez, deve-se verificar se há algum trajeto que leve o cavalo a passar em todas as casas do tabuleiro, entrando uma única vez em cada uma delas. Uma maneira que "quebrar"este problema é buscar solucionar a maneira de localizar qual o próximo movimento possível ou retornar pela impossibilidade de qualquer movimento.

**Estruturas de Dados** Usar-se-á uma matriz $h$ de $n$ linhas por $n$ colunas, e nela:

- $h[x, y] = 0$ Indicará que a célula $x, y$ ainda não foi ocupada.
- $h[x, y] = i$ Indicará que a célula $x, y$ foi ocupada no último movimento, onde $1 \leq i \leq n^2$.

A condição tabuleiro não totalmente preenchido pode ser traduzida por $i < n^2$. Se forem criadas duas variáveis $u$ e $v$ a partir das quais se estabelece as novas coordenadas do cavalo, então o predicado movimento aceitável pode ser expresso como
$1 \leq u \leq n \wedge 1 \leq v \leq n$ e também $h_{uv} = 0$ ou seja o local de destino do movimento ainda não tenha sido usado. O registro de um movimento válido é então feito usando a atribuição $h_{uv} \leftarrow i$ e o cancelamento deste registro (em caso de chegar-se a um beco sem saída) é pela atribuição $h_{uv} \leftarrow 0$.

### Movimentos

Como se sabe, um cavalo localizado na casa central de um tabuleiro $5 \times 5$ pode ocupar 8 casas distintas (isto é, pode fazer 8 movimentos distintos. Veja na figura 1.

### Algoritmo

e com isso, o algoritmo fica:
1: **Algoritmo** CAVALO

```
2: inteiro MATRIZ [n] [n]
3: inteiro DLIN [8]
4: inteiro DCOL [8]
5: DLIN ← -2, -1, 1, 2, 2, 1, -1, -2,
6: DCOL ← 1, 2, 2, 1, -1, -2, -2, -1,
7: lógico função ANDACAVALO (int NUMMOV, LCAV, CCAV)
8: inteiro LP, CP
9: inteiro K
10: lógico RESP
11: K ← 1
12: repeat
13:    RESP ← FALSO
14:    LP ← LCAV + DLIN [K]
15:    CP ← CCAV + DCOL [K]
16:    if (LP ≥ 1) ∧ (LP ≤ n) ∧ (CP ≥ 1) ∧ (CP ≤ n) then
17:       if MATRIZ [LP] [CP] = 0 then
18:          MATRIZ [LP] [CP] ← NUMMOV
19:          if NUMMOV < (n²) then
20:             RESP ← ANDACAVALO (NUMMOV+1, LP, CP)
21:             if (RESP = FALSO) then
22:                MATRIZ [LP] [CP] ← 0
23:             end if
24:          else
25:             RESP ← VERDADEIRO
26:          end if
27:       end if
28:    end if
29:    K++
30: until (K > 8) ∨ (RESP = VERDADEIRO))
31: devolva (RESP)
32: fim função
33: MATRIZ ← 0
34: MATRIZ [linha inicial] [coluna inicial] ← 1
35: if (ANDACAVALO (2, linha inicial, coluna inicial)) then
36:    imprima MATRIZ
37: else
38:    imprima "Não existe caminho possível"
39: end if
40: fim algoritmo
```

**Alguns resultados** Seja um tabuleiro $5 \times 5$ inicializado na posição 2,4. Eis uma possível resposta:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25 | 16 | 11 | 6 | 19 |
| 10 | 5 | 18 | 1 | 12 |
| 17 | 24 | 15 | 20 | 7 |
| 4 | 9 | 22 | 13 | 2 |
| 23 | 14 | 3 | 8 | 21 |

Este processamento resultou em 86208 movimentos do cavalo.

Em python,

```
import time
import numpy as np
global mat
mat=np.zeros((8,8),int)
global ct
ct=0
def andacavalo(nummov, lcav, ccav):
  global ct
#  print(mat,nummov)
#  print('---------------------------------')
  dlin=[-2,-1,1,2,2,1,-1,-2]
  dcol=[1,2,2,1,-1,-2,-2,-1]
  k=0
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
  while 1==1:

    resp=0
    lp=lcav+dlin[k]
    cp=ccav+dcol[k]
    if lp>=0 and lp<8 and cp>=0 and cp<8:
      if mat[lp,cp]==0:
 mat[lp,cp]=nummov
 if nummov<62:
 ct=ct+1
 resp=andacavalo(nummov+1,lp,cp)
 if resp==0:
   mat[lp,cp]=0
 else:
 resp=1
    k=k+1
    if k>7 or resp!=0:
      break
  return resp

mat[4,4]=1
ini=time.time()
if andacavalo(2,4,4)==1:
  print(ct)
  print(mat)
fim=time.time()
print(fim-ini)
```

**Dados reais** A seguir, uma configuração real, com dados de processamento em C++ e em Python, até para haver comparação. O resultado numérico – por óbvio – é igual, mas os dados de desempenho não são. Ambas as soluções foram:

```
[[53 34 55 30 51 32 15 18]
 [56 49 52 33 16 19  6 13]
 [35 54 29 50 31 14 17  4]
 [48 57 36 41 20  5 12  7]
 [37 28 47 58 43 22  3 64]
 [46 59 42 21 40 11  8 23]
 [27 38 61 44 25  2 63 10]
 [60 45 26 39 62  9 24  1]]
```

Em ambas houve 27.241.111 chamadas recursivas. A diferença está no tempo de execução. C++ demorou 2.75 segundos enquanto Python demorou 272.1 segundos. Praticamente 100 vezes mais. É obvio, mas vale informar: é o mesmo computador, a mesma memória e tanto quanto possível o mesmo ambiente para ambos.

**Algoritmo de Strassen** O algoritmo de Strassen preve uma pequena economia ao realizar a multiplicação matricial. A importância deste algoritmo é que durante anos, a ninguém ocorreu que alguma otimização pudesse ser feita sobre o algoritmo canônico. Strassen percebeu que em $r = a.b$ ($a$ e $b$ matrizes conformáveis) se ambas fossem divididas em 4 (com cortes ao meio), para obter a resposta, ao invés de fazer 8 multiplicações, eram necessárias apenas 7, acompanhe:

- $a$ é dividida em 4: $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{21}$ e $a_{22}$
- idem para b
- agora são calculadas 7 sub-matrizes recursivamente, usando diversas parcelas envolvendo $a_{ij}$ e $b_{km}$.
- finalmente, o resultado é obtido executando operações elementares (adição e subtração) sobre as 7 sub-matrizes.

Um detalhe importante é que a se a matriz a multiplicar não tiver dimensões iguais a uma potência de 2, basta acrescentar zeros nas linhas ou nas colunas para atingir esta condição. Tais linhas e colunas podem ser retiradas depois sem alterar o resultado numérico da operação.

Acompanhe o algoritmo e se quiser efetue a multiplicação matricial canônica para conferir o resultado correto do algoritmo de Strassen.

```
#strassen em Python, usando o pacote numpy
import numpy as np
import random as ra
import time
tam=512
a=np.zeros((tam,tam),float)
for i in range(0,tam):
  for j in range(0,tam):
    a[i][j]=ra.random()
b=np.zeros((tam,tam),float)
for i in range(0,tam):
  for j in range(0,tam):
    b[i][j]=ra.random()

def marra(a,b):
  tam=len(a)
  r=np.zeros((tam,tam),float)
  for i in range(tam):
    for j in range(tam):
      olha=0
      for k in range(tam):
 olha=olha+a[i][k]*b[k][j]
      r[i][j]=olha
  return(r)

def strassen(x,y):
  n=len(x)
  if n>4: # ou n>1
    me=int(n/2)
    a11=x[0:me,0:me]
    a12=x[0:me,me:n]
    a21=x[me:n,0:me]
    a22=x[me:n,me:n]
    b11=y[0:me,0:me]
    b12=y[0:me,me:n]
    b21=y[me:n,0:me]
    b22=y[me:n,me:n]
    m1=strassen((a11+a22),(b11+b22))
    m2=strassen((a21+a22),b11)
    m3=strassen(a11,(b12-b22))
    m4=strassen(a22,(b21-b11))
    m5=strassen((a11+a12),b22)
    m6=strassen((a21-a11),(b11+b12))
    m7=strassen((a12-a22),(b21+b22))
    c=np.zeros((n,n),int)
    c[0:me,0:me]=m1+m4-m5+m7
    c[0:me,me:n]=m3+m5
    c[me:n,0:me]=m2+m4
    c[me:n,me:n]=m1-m2+m3+m6
    return c
  else:
    return marra(x,y) # ou x*y
ini=time.time()
strassen(a,b)
fim=time.time()
print('Demora de strassen',fim-ini)
```

Dados reais: Eis um possível desempenho real destas funções: Para matrizes de 256 reais, o algoritmo de Strassen (com $n > 4$) demorou 13.8 seg e o algoritmo canônico 18.5 seg. Já para matrizes de 512 reais, os tempos foram de 89.6 e 150.3 segundos respectivamente. Fica de fora a análise da função primitiva do numpy-python `dot(a,b)` que tem um desempenho maravilhoso: para os casos citados demorou 0.002 e 0.015 segundos.

 ©75-18, Pedro Kantek

**Quickselect** Trata-se de descobrir a mediana de um conjunto de dados desordenados, sem ser necessário ordená-los. A referência é "Algoritmos para Leigos" de Mueller, John e Massaron, Luca, pág. 334.

Seja calcular a mediana de uma lista (desordenada) de números. Da estatística, sabe-se que a mediana de uma distribuição é o valor que ocupa a posição central DEPOIS que a distribuição é ordenada. (No caso da ordenação ter um número par de elementos, a mediana é a média entre os 2 valores centrais). Esta definição aponta para uma solução simples: ordenar a sequência e depois tomar o elemento central. Só que a ordenação é uma operação custosa (custa $O(n.logn)$ no mínimo, e o que se pretende aqui é achar a mediana sem precisar ordenar nada e pagando apenas $O(n)$. Pode-se batizar este algoritmo como Quickselect, ou o algoritmo do k-ésimo valor. Os passos do algoritmo recursivo são:

1. A chamada é $QS(lista, k)$
2. O algoritmo escolhe um pivot (aleatório) e divide a lista em 2: à esquerda os menores do que o pivot e à direita os maiores do que o pivot.
3. Achar o comprimento das 2 listas. Se o $tam(esquerdo) > k$, então a mediana está na lista esquerda. Aplicar $QS(esquerdo)$.
4. subtrair de k o tamanho da lista esquerdo
5. Calcular o número de duplicações da mediana, fazendo $tam(lista) - (tam(esquerdo) + tam(direito))$
   - Se o número de duplicações é maior do que $k$, achou-se a mediana
   - senão, remover o número de duplicações de $k$ ($novok = k - duplicacoes$) e aplicar $QS(direito, novok)$.

Em python:

```
from random import randint, random, choice
import numpy as np
import sys
import time
tam=100000
a=np.zeros((tam+1),float)
for i in range(1,tam+1):
  a[i]=random()*100000
def quickselect(series,k):
  pivot=choice(series)
     #retorna um randomico da lista
  left, right = list(),list()
  for item in series:
    if item<pivot:
      left.append(item)
    if item>pivot:
      right.append(item)
  lenght_left=len(left)
  if lenght_left > k:
    return quickselect(left,k)
  k=k-lenght_left
  dupli=len(series)-(lenght_left+len(right))
  if dupli>k:
    return float(pivot)
  k=k-dupli
  return quickselect(right,k)
ini=time.time()
print(quickselect(a,(tam//2)+1))
fim=time.time()
print("tempo quickselect ",fim-ini)

def partition(arr, begin, end):
  pivot = begin
  for i in range(begin+1, end+1):
    if arr[i] <= arr[begin]:
      pivot = pivot + 1
      arr[i],arr[pivot]=arr[pivot],arr[i]
  arr[pivot],arr[begin]=arr[begin],arr[pivot]
  return pivot
```

```
def quicksort(array, begin=0, end=None):
  if end is None:
    end = len(array) - 1
  def _quicksort(array, begin, end):
    if begin >= end:
      return
    pivot = partition(array, begin, end)
    _quicksort(array, begin, pivot-1)
    _quicksort(array, pivot+1, end)
  return _quicksort(array, begin, end)

ini=time.time()
print(quicksort(a))
print(a[1+(tam//2)])
fim=time.time()
print("tempo canonico ",fim-ini)
```

Eis a chamada completa para obter a mediana:

```
def mediana(se):
  if len(se)%2 != 0:
    return quickselect(se,len(se,len(se)//2)
  else:
    le=quickselect(se,(len(se)-1)//2)
    ri=quickselect(se,(len(se)+1)//2)
    return (le+ri)/2
```

## 13.18 A*

Relembrando o que se viu atrás, o problema fundamental na informática é: *dada uma chave recuperar os dados associados a essa chave*. Em miúdos: dado um CPF recuperar as transações deste CPF em algum contexto. Aplicando métricas, suponhamos que há $n$ chaves e $s$ espaço de armazenamento. Antes de prosseguir, declare-se que nos últimos anos (décadas), o tamanho tanto de $n$ quanto de $s$ explodiram. Está aí o espaço de armazenamento da Internet que não deixa mentir. Mesmo em instalações pessoais, há não muito tempo a unidade de armazenamento era o Megabyte. Passamos ao Gigabyte (1024 vezes maior) e ao Terabyte (mais 1024 vezes maior). Acho que ainda veremos o Petabyte (mais 1024 maior) por aí.

Mas, o ponto agora é ainda maior do que isso. Há espaços de armazenamento que extrapolam esses números, mesmo que eles cresçam explosivamente. Vamos a um exemplo real. Suponhamos um jogador de xadrez. A chave $k$ aqui é uma situação de tabuleiro e o retorno esperado é qual a melhor resposta a esta situação. Supondo uma tabela com todas as possibilidades de jogo, a busca e recuperação seria – em tese – bem simples. A questão é: **qual seria o tamanho dessa tabela ?**. Ninguém sabe ao certo, mas há uma estimativa (em [RUS03]) de que tal tabela teria $10^{120}$ itens de tamanho. Mostrado dessa maneira não parece muito impressionante, mas por extenso o número é mais forte: 100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000, ou seja, um '1' seguido de 120 zeros.

Apenas para comparar, vamos a alguns outros conceitos: Comecemos com o número de Avogadro que é a quantidade de moléculas em um mol de qualquer substância. Ou seja 18 gramas (ou 18 ml) de água, ou 2 gramas de Hidrogêneo ou 16 gramas de Oxigênio. Ele indica a quantidade de átomos nos 2 últimos casos. Ou de moléculas no primeiro. É de $6.02 \times 10^{23}$ ou por extenso 602000000000000000000000. Agora imagine-se o universo conhecido: bilhões de galaxias e em cada galaxia bilhões de estrelas e seus sistemas planetários e neles os planetas. Agora imagine quantos átomos haverá nesse universo. E, depois quantos eletrons haverá aí. Pois este número de elétrons existentes no nosso Universo está estimado em $10^{80}$ eletrons ou 100000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000.

Então, se cada eletron existente no universo fosse usado para armazenar uma posição no xadrez (como ?) ainda assim haveria necessidade de $10^{40}$ universos distintos (ou 10000000000000000000000000000000000000000 universos) para poder representar as posições do jogo.

Claramente, há uma impossibilidade de escrever toda a tabela. Há que navegar pelo jogo, sem representar tudo. Aqui entram os algoritmos "inteligentes" de busca, dos quais o mais conhecido e simples é o $A^*$.

**A*** O algoritmo A*, criação de Hart, Nilsson e Raphael apareceu em 1968. Um artigo de 1972, de Hart, corrigiu alguns pequenos equívocos da apresentação original. A idéia é juntar na mesma busca, vantagens da busca gulosa (sempre a opção mais apetitosa) e da busca em largura. A primeira é eficiente, mas pode chegar a um beco sem saída. A segunda sempre chega à resposta, mas pode ser tremendamente ineficiente. Usando A*, a função de avaliação do próximo candidato a expandir na árvore de busca é

$\boxed{f(n) = k_1 \times p(n) + k_2 \times h'(n)}$

Sem perda de generalidade, pode-se inicialmente, considerar $k_1 = k_2 = 1$ e com isso a fórmula com que trabalharemos, por enquanto, é:

$\boxed{f(n) = p(n) + h'(n)}$

Trocando em miúdos, para cada nodo na árvore, dever-se-á calcular sua profundidade, e também a heurística do nodo. O campeão (ou seja, o nodo que vai ser expandido) é aquele que tiver o menor valor de $f(n)$.

$p(n)$ calcula o valor do custo necessário para ir do nodo inicial até o nodo em questão. Já $h'(n)$ estima o custo necessário para ir do nodo atual até um estado meta. Como o objetivo é minimizar o caminho total, deve-se expandir o nodo que tiver a menor soma de ambas parcelas. Nesse sentido, $f(n)$ pode ser entendido como uma estimativa do menor custo para ir do estado inicial até um estado meta, passando por $n$.

Se se conseguir impor uma pequena restrição à função $h'(n)$, pode-se afirmar que a busca A* é *completa* e *ótima*. A restrição é de que deve-se escolher uma função $h'$ que nunca sobreestime o esforço necessário para alcançar a meta. Ou seja, a função deve ser otimista: pode errar para menos no esforço que será necessário, mas nunca poderá errar para mais.

Um bom exemplo para esta função, no caso de um problema que visa determinar qual o melhor caminho rodoviário entre duas cidades, poderia ser a distância linear entre cada ponto parcial e o destino. Perceba que esta medida erra para menos, mas nunca pode errar para mais.

Comecemos com um exemplo simples: Este exercício vai oferecer uma matriz quadrada numérica e solicitar qual a menor soma de vizinhos contíguos saindo do elemento mais alto à esquerda até o mais baixo à direita. Ao fazer a soma, pode-se andar (somar) para qualquer um dos quatro vizinhos da célula atual. Este exercício está baseado no problema 83 do projeto Euler (projecteuler.net). Assim, por exemplo, na matriz

```
131 673 234 103  18
201  96 342 965 150
630 803 746 422 111
537 699 497 121 956
805 732 524  37 331
```

O caminho mais barato é: 131 + 201 + 96 + 342 + 234 + 103 + 18 + 150 + 111 + 422 + 121 + 37 + 331 = 2297. O referido caminho fica mais visível em

O fato do caminho poder voltar à esquerda inviabiliza o algoritmo da programação dinâmica.

Embora existam diversos algoritmos para calcular este caminho vai se usar aqui o algoritmo A* ligeiramente modificado.

Relembrando, o algoritmo A* está baseado na idéia de custo de um nodo, que sempre é calculado fazendo-se

$$C = F + H$$

onde $C$ é o custo de um nodo, $F$ é o valor real desde o início até o nodo em análise e $H$ é uma heurística estimadora do caminho que falta para chegar até o final.

Neste caso, $F$ é o valor real da soma dos valores da matriz desde a casa inicial (1,1) até a casa que se está examinando. Quanto a $H$, usaremos como função heurística o menor valor de custos da matriz original multiplicado pela distância manhattan da casa atual até o final.

Para entender este conceito, examine a matriz $H$ do exemplo acima:

```
162 144 126 108  90
144 126 108  90  72
126 108  90  72  54
108  90  72  54  36
 90  72  54  36  18
```

Note que o menor valor da matriz original é 18, e este valor foi sendo multiplicado pela quantidade de casas necessárias a percorrer até o final da matriz. Eis a variavel LA do exemplo acima

```
    lin col  som      custo    pai
    --- --- ----  ----------- ---
 1-   1   1   131  10000000293  -1
 2-   1   2   804  10000000948   1
```

```
 3-  2  1   332  10000000476   1
 4-  2  2   428  10000000554   3
 5-  3  1   962  10000001088   3
 6-  2  3   770  10000000878   4
 7-  3  2  1231  10000001339   4
 8-  1  3  1004  10000001130   6
 9-  2  4  1735  10000001825   6
10-  3  3  1516  10000001606   6
11-  4  1  1499  10000001607   5
12-  1  4  1107  10000001215   8
13-  1  5  1125  10000001215  12
14-  2  5  1275  1000000134713
15-  4  2  1930  2020   7
16-  3  5  1386  10000001440 14
17-  4  5  2342  2378  16
18-  3  4  1808  10000001880 16
19-  4  3  2013  2085  10
20-  5  1  2304  2394  11
21-  4  4  1929  10000001983 18
22-  5  4  1966  10000002002 21
23-  5  5  2297  2315  22
```

**Mais um exemplo**

Seja uma matriz de ordem 14 a saber:

```
      1   2   3   4   5   6   7   8   9  10  11  12  13  14
    --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- --- ---
 1|   70 149 101 892 457 539 404 230 254 321 833 902 962 592
 2|  929 159 415 466 507  24 231 222 493 630 543 951 215 290
 3|  729 517 916  72 261 688 316 980 354 842  91 333 613 471
 4|  165  77 713 484 525 172  27 812 766 167 410 998 933  95
 5|  509 881 977 282 402 990  93 955 198 979  45 885 889  79
 6|  548 105 569 320 558 423 452  46 367 875 153 285 584 618
 7|  446 417 658 606 249  53 935 473 264  23 771 148 827 770
 8|  783 697   9 343 381 942 210  88 182 536  13 667 874 538
 9|  531  47 819 345 331 125 992 600  69 194 954 604 246 563
10|  969 835 708 499 436 756 409 693 628  61 475 869 219 635
11|  828 769 786 442 138 679  73 186 145  96 128 137 247 431
12|  975 274 903 777   8  26 734 614 508 549 272 946 792 896
13|  831 386  97 595 853 256 774 414 968 801 991 545 883 656
14|  166 258 989 799 152   5 155 554 681 912   7 356 820 529
```

Nesta matriz o menor custo é 7036, com 27 casas percorridas, a saber: 14 14, 13 14, 12 14, 11 14, 11 13, 11 12, 11 11, 11 10, 10 10, 9 10, 9 9, 8 9, 8 8, 7 8, 6 8, 6 7, 5 7, 4 7, 4 6, 4 5, 3 5, 3 4, 2 4, 2 3, 1 3, 1 2, 1 1. Eis este algoritmo em Python:

```
def vivo831():
  t=50
  ICA = []
  f=open("c:/p/n/831/EXEA00000",'r')
  matrix = [[0 for i in range(t)] for j in range(t)]
  for i in range(t):
    ll = f.readline()
    matrix[i] = [int(x) for x in ll.split()]
  inf = 1000000000
  men = min(min(matrix))
  h = [[men for col in range(t)] for row in range(t)]
  i=t
  while (i>=1):
    j=t
    while (j>=1):
      h[i-1][j-1]=h[i-1][j-1]*((-1)+(t-(i-1))+(t-(j-1)))
      j=j-1
    i=i-1
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
  la=[]
  zica=[]
  proximo=1
  la.append([0,0,matrix[0][0],(matrix[0][0]+h[0][0]),-1])
  zica.append(0)
  while (1==1):
    men=9999999999999999
    imen=0
    i=0
    while (i<len(la)):
      if la[i][3]<men:
 men=la[i][3]
 imen=i
      i=i+1
    la[imen][3]=la[imen][3]+inf
# processamento do filho 1
    f1=[la[imen][0]-1,la[imen][1]]
    if min(f1)>=0 and max(f1)<=t-1 and f1[0]*1000+f1[1] not in zica:
      zica.append(f1[0]*1000+f1[1])
      conta=la[imen][2]+matrix[f1[0]][f1[1]]
      la.append([f1[0],f1[1],conta,conta+h[f1[0]][f1[1]],imen])
      proximo=proximo+1
      if f1[0]==t-1 and f1[1]==t-1:
 break
# processamento do filho 2
    f2=[la[imen][0],la[imen][1]+1]
    if min(f2)>=0 and max(f2)<=t-1 and f2[0]*1000+f2[1] not in zica:
      zica.append(f2[0]*1000+f2[1])
      conta=la[imen][2]+matrix[f2[0]][f2[1]]
      la.append([f2[0],f2[1],conta,conta+h[f2[0]][f2[1]],imen])
      proximo=proximo+1
      if f2[0]==t-1 and f2[1]==t-1:
 break
# processamento do filho 3
    f3=[la[imen][0]+1,la[imen][1]]
    if min(f3)>=0 and max(f3)<=t-1 and f3[0]*1000+f3[1] not in zica:
      zica.append(f3[0]*1000+f3[1])
      conta=la[imen][2]+matrix[f3[0]][f3[1]]
      la.append([f3[0],f3[1],conta,conta+h[f3[0]][f3[1]],imen])
      proximo=proximo+1
      if f3[0]==t-1 and f3[1]==t-1:
 break
# processamento do filho 4
    f4=[la[imen][0],la[imen][1]-1]
    if min(f4)>=0 and max(f4)<=t-1 and f4[0]*1000+f4[1] not in zica:
      zica.append(f4[0]*1000+f4[1])
      conta=la[imen][2]+matrix[f4[0]][f4[1]]
      la.append([f4[0],f4[1],conta,conta+h[f4[0]][f4[1]],imen])
      proximo=proximo+1
      if f4[0]==t-1 and f4[1]==t-1:
 break
  ultimo=proximo-1
  print("Custo deste caso = "+str(la[ultimo][2]))
  vica=0
  while ultimo != -1:
#    print(la[ultimo][0]+1,la[ultimo][1]+1)
    ICA.append([la[ultimo][0]+1,la[ultimo][1]+1])
    ultimo=la[ultimo][4]
    vica=vica+1
  print("Numero de trechos "+str(vica))
# fazendo o caminho gráfico em CAM
  CAM = [[" " for i in range(t)] for j in range(t)]
  i=0
```

```
  while i<len(ICA)-1:
    j = ICA[i]
    k = ICA[i+1]
    if j[0]==k[0] and j[1]>k[1]:
      m=[k[0],k[1]]
      CAM[m[0]-1][m[1]-1]='>'
    if j[0]==k[0] and j[1]<k[1]:
      m=[k[0],k[1]]
      CAM[m[0]-1][m[1]-1]='<'
    if j[0]<k[0] and j[1]==k[1]:
      m=[k[0],k[1]]
      CAM[m[0]-1][m[1]-1]='^'
    if j[0]>k[0] and j[1]==k[1]:
      m=[k[0],k[1]]
      CAM[m[0]-1][m[1]-1]='v'
    i=i+1
  for i in range(1,len(CAM)-1):
    for j in range(1,len(CAM[i])-1):
      print(CAM[i][j], end=' ')
    print()
  print("acabou")

vivo831()
```

## 13.19 Ordenação

- Na década de 70, James Martin sugeriu que 40% do tempo de TODOS os computadores é gasto neste algoritmo.
- O conceito de ordem é fundamental em programação
- Excelente tópico para estudar algoritmos e estudar comportamentos e complexidades

Apenas para reforçar o conceito de ordem, em espanhol, um computador é *un ordenador* e em francês é *un ordinateur*.

Antes de começarmos a estudar os diversos algoritmos de classificação, vamos definir o problema:

Seja X um conjunto composto por $i$ elementos entre os quais se pode estabecer uma relação de ordem. Dados $X_i$ e $X_j$ com $i \neq j$, sempre pode-se estabelecer $X_i > X_j$ ou $X_i = X_j$ ou $X_i < X_j$.

- X estará em ordem crescente se e somente se $X_i \leq X_j, \ \forall i < j$.
- X estará em ordem estritamente crescente se e somente se $X_i < X_j, \ \forall i < j$.
- X estará em ordem decrescente se e somente se $X_i \geq X_j, \ \forall i < j$.
- X estará em ordem estritamente decrescente se e somente se $X_i > X_j, \ \forall i < j$.

Um algoritmo de ORDENAÇÃO é aquele que recebe um X qualquer (possivelmente desordenado), permuta seus elementos e devolve X em ordem.

Tipicamente fazem parte de $X_i$ um conjunto de informações. Neste caso, haverá uma parte de $X_i$ denominada CHAVE é identificada por $k$ (k=key) pela qual se fará a ordenação. Embora devamos ter em mente a existência dos outros campos, apenas a chave será tratada nos algoritmos.

Os algoritmos de ordenação, grosso modo, podem ser divididos em 2 categorias: aqueles de complexidade $O(n^2)$ e os de complexidade $O(n \times log_2 n)$, ambas as expressões – como sempre – a menos das constantes multiplicativas.

O estudo da primeira família se justifica pelas seguintes razões:
1. Constantes multiplicativas eventualmente menores
2. Abundância de recursos de hardware
3. Irrelevância do desempenho para pequenas instâncias
4. Simplicidade (inclusive conceitual) dos algoritmos envolvidos

**Principais algoritmos** **Bolha** Trata-se do algoritmo mais simples que existe. Pares de vizinhos são comparados e se eles estiverem desordenados, são invertidos. A cada passada, o elemento mais leve é levado para a ponta. Daí o nome.

**Bolha*** O mesmo algoritmo acima, mas com um pequeno truque para encerrar o algoritmo mais cedo caso o vetor a ordenar seja do tipo "quasi-ordenado".

**Inserção** O mesmo algoritmo usado pelo jogador de buraco ao ordenar as cartas que recebe. Há um monte de cartas

desordenadas. As cartas, uma a uma, vão sendo retiradas desse monte e colocadas em ordem na mão do freguês. Quando o monte terminar, a mão está ordenada.

**Seleção** O menor elemento do vetor a ordenar é intercambiado com o primeiro elemento do vetor. Depois, o segundo menor com o segundo elemento, e assim por diante.

**Shell** Tem este nome devido ao seu descobridor, o dr Shell em 1959. Parecido com o BOLHA no sentido de que ele troca vizinhos, mas não próximos e sim distantes. Adicionalmente aos demais algoritmos, este precisa uma seqüência de controle, como operador adicional. Pode ter quantos números se quiser, desde que o último seja sempre 1.

**HeapSort** Usa como estrutura auxiliar um heap. Tem desempenho excelente, e se o programador souber bem o que é um heap, sua implementação é fácil e o seu conceito mais ainda.

**Quick** Devido a C.R.Hoare em 1962, este algoritmo é o campeão. Ninguém até hoje conseguiu ser mais rápido que ele. Sua estratégia passa pela escolha de pivots, que dividem o conjunto sendo classificado em 2 partes. Uma contém os elementos menores que o pivot e a outra os maiores. Levando esse procedimento ao limite, o conjunto estará classificado. Este é um excelente exemplo da estratégia "dividir e conquistar". os algoritmos em C++:

```
#include<iostream>
using namespace std;

void bolha(int v[], int tam){
    int i,j;
    i=tam-1;
    while (i>=1){
       j=1;
       while(j<=i){
   if (v[j-1]>v[j]){
      swap(v[j-1],v[j]);
      }
   j++;
   }
       i--;
    }
}

void bolhaest(int v[], int tam){
    int i,j,mudou;
    i=tam-1;
    mudou=1;
    while ((i>=1)&&mudou){  // mudou==1
       j=1;
       mudou=0;
       while(j<=i){
   if (v[j-1]>v[j]){
      swap(v[j-1],v[j]);
      mudou=1;
      }
   j++;
   }
       i--;
    }
}

void inser(int v[], int n)
{
   int i, aux, j;
   for (i = 1; i < n; i++) {
       aux = v[i];
       j = i-1;
       while (j >= 0 && v[j] > aux) {
    v[j+1] = v[j];
    j = j-1;
       }
       v[j+1] = aux;
   }
}
```

```
void selec (int v[], int tam) {
   int i,j,cor,inui;
   i=0;
   while (i<tam){
      cor=v[i];
      inui=i;
      j=i+1;
      while (j<tam){
  if (v[j]<cor){
      cor=v[j];
      inui=j;
  }
  j++;
      }
      swap(v[i],v[inui]);
      i++;
   }
}

void shell(int v[], int tam){
   int k,h,i,j,x,m;
   int decr[3]={5,3,1};  // se quiser, pode alterar os tamanhos
   int tam2;
   tam2=sizeof(decr)/sizeof(decr[0]);
   for (k=0;k<tam2;k++){
      h=decr[k];
      i=h;
      while (i<tam){
  x=v[i];
  j=i;
  while ((j>=h) && (v[j-h]>x)){
     v[j]=v[j-h];
     j=j-h;
  }
  v[j]=x;
  i++;
      }
   }
}

void criaheap(int v[], int n, int i) {
    int maior = i;
    int l = 2*i + 1;
    int r = 2*i + 2;
    if (l < n && v[l] > v[maior]) {
 maior = l;
    }
    if (r < n && v[r] > v[maior]) {
 maior = r;
    }
    if (maior != i) {
 swap(v[i], v[maior]);
 criaheap(v, n, maior);
    }
}
void heapsort(int v[], int n) {
    for (int i = n / 2 - 1; i >= 0; i--){
 criaheap(v, n, i);
    }
    for (int i=n-1; i>=0; i--) {
 swap(v[0], v[i]);
 criaheap(v, i, 0);
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
    }
}

void quick(int v[], int i, int f) {
   int ant, dep, mei;
   ant=i;
   dep=f;
   mei=v[(i+f)/2];
   do{
      while(v[ant]<mei){
  ant++;
  }
      while (v[dep]>mei){
  dep--;
  }
      if (ant<=dep) {
  swap(v[ant],v[dep]);
  ant++;
  dep--;
  }
   } while (ant<=dep);
   if (i<dep){
      quick(v, i,dep);
      }
   if (ant<f){
      quick(v,ant,f);
      }
   }

int main(){
   int ve1[]={7,3,1,9,11,23,6,6,19,10,33,44,55,23,24,25,26};
   int i,tam;
   tam = sizeof(ve1)/sizeof(ve1[0]);
   cout<<"bolha ";
   bolha(ve1,tam);
   for (i=0;i<tam;i++){
       cout<<ve1[i]<<' ';
   }
   int ve2[]={7,3,1,9,11,55,88,66,29,100,23,6,6,19,10};
   tam = sizeof(ve2)/sizeof(ve2[0]);
   cout<<endl<<"bolhaestrela ";
   bolhaest(ve2,tam);
   for (i=0;i<tam;i++){
      cout<<ve2[i]<<' ';
   }
   int ve3[]={5,7,1,3,2,4,8,6,9,57,68,79,54,33};
   tam = sizeof(ve3)/sizeof(ve3[0]);
   cout<<endl<<"insercao ";
   inser(ve3,tam);
   for (i=0;i<tam;i++){
      cout<<ve3[i]<<' ';
   }
   int ve4[]={22,23,7,3,1,9,11,23,6,6,19,10};
   tam = sizeof(ve4)/sizeof(ve4[0]);
   cout<<endl<<"selecao ";
   selec(ve4,tam);
   for (i=0;i<tam;i++){
      cout<<ve4[i]<<' ';
   }
   int ve5[]={7,3,1,9,11,23,6,6,19,10,8,88,888};
   tam = sizeof(ve5)/sizeof(ve5[0]);
   cout<<endl<<"shell ";
   shell(ve5,tam);
```

```
   for (i=0;i<tam;i++){
      cout<<ve5[i]<<' ';
   }
   int ve6[]={7,3,1,88,888,2,22,21,17,19,12,13,11};
   tam = sizeof(ve6)/sizeof(ve6[0]);
   cout<<endl<<"heap ";
   heapsort(ve6,tam);
   for (i=0;i<tam;i++){
      cout<<ve6[i]<<' ';
   }
   int ve7[]={2,22,26,29,7,3,1,91,9,11,23,6,6,19,10};
   tam = sizeof(ve7)/sizeof(ve7[0]);
   cout<<endl<<"quick ";
   quick(ve7,0,tam);
   for (i=0;i<tam;i++){
      cout<<ve7[i]<<' ';
   }
}
```

os mesmos algoritmos em Python:

```
# ordenações
def bolha(v):
  i=len(v)-1
  while i>=1:
    j=1
    while j<=i:
      if v[j-1]>v[j]:
 v[j-1],v[j]=v[j],v[j-1]
      j=j+1
    i=i-1
  return(v)

def bolhaest(v):
  i=len(v)-1
  mudou=True
  while i>=1 and mudou:
    j=1
    mudou=False
    while j<=i:
      if v[j-1]>v[j]:
 v[j-1],v[j]=v[j],v[j-1]
 mudou=True
      j=j+1
    i=i-1
  return(v)

def inser(v):
  v=v+[0]
  for i in range(1,len(v)):
    aux=v[i]
    j=i-1
    while j>=0 and v[j]>aux:
      v[j+1]=v[j]
      j=j-1
    v[j+1]=aux
  return v[1:]

def selec(v):
  i=0
  while i<len(v):
    cor=v[i]
    inui=i
```

```
    j=i+1
    while j<len(v):
      if v[j]<cor:
 cor=v[j]
 inui=j
      j=j+1
    v[i],v[inui]=v[inui],v[i]
    i=i+1
  return v

def shell(v):
  decr=[5,3,1]
  for k in range(len(decr)):
    i=h=decr[k]
    while i<len(v):
      x=v[i]
      j=i
      while j>=h and v[j-h]>x:
 v[j]=v[j-h]
 j=j-h
      v[j]=x
      i=i+1
  return v

def criaheap(v,n,i):
  maior=i
  l=2*i+1
  r=2*i+2
  if l<n and v[l]>v[maior]:
    maior=l
  if r<n and v[r]>v[maior]:
    maior=r
  if maior != i:
    v[i],v[maior]=v[maior],v[i]
    criaheap(v,n,maior)
  return v

def heapsort(v,n):
  i=(n//2)-1
  while i>=0:
    v=criaheap(v,n,i)
    i=i-1
  i=n-1
  while i>=0:
    v[0],v[i]=v[i],v[0]
    v=criaheap(v,i,0)
    i=i-1
  return v

def quick(v,i,f):
  ant=i
  dep=f
  mei=v[(i+f)//2]
  while 1==1:
    while v[ant]<mei:
      ant=ant+1
    while v[dep]>mei:
      dep=dep-1
    if ant<=dep:
      v[ant],v[dep]=v[dep],v[ant]
      ant=ant+1
      dep=dep-1
    if ant>dep:
```

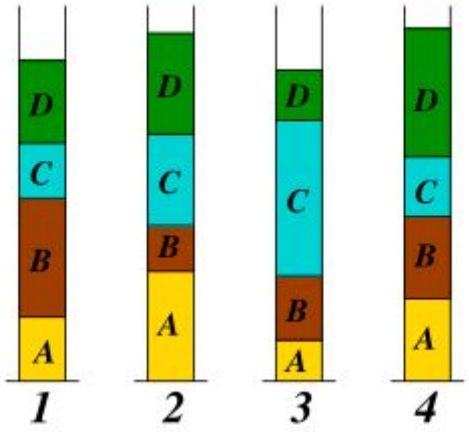
```
      break
  if i<dep:
    quick(v,i,dep)
  if ant<f:
    quick(v,ant,f)
  return v


vv=[1,7,3,22,19,18,17,162,16,7,51,59,58,67,87]
print(bolha(vv))
print(bolhaest(vv))
print(inser(vv))
print(selec(vv))
print(shell(vv))
print(heapsort(vv,len(vv)))
print(quick(vv,0,len(vv)-1))
```

## 13.20 Sistemas lineares na prática

**1. Materiais Particulados** Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de $A$, $B$, $C$ e $D$ e suas densidades de $\rho_A$, $\rho_B$, $\rho_C$ e $\rho_D$ estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

| incógnita | significado |
|---|---|
| $m_1$ | massa da proveta 1 |
| $m_2$ | massa da proveta 2 |
| $m_3$ | massa da proveta 3 |
| $m_4$ | massa da proveta 4 |
| $v_{im}$ | volume material $m$ na proveta $i$ |

Veja-se uma visualização do que se fala




Deve-se lembrar que a massa de material $A$ na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

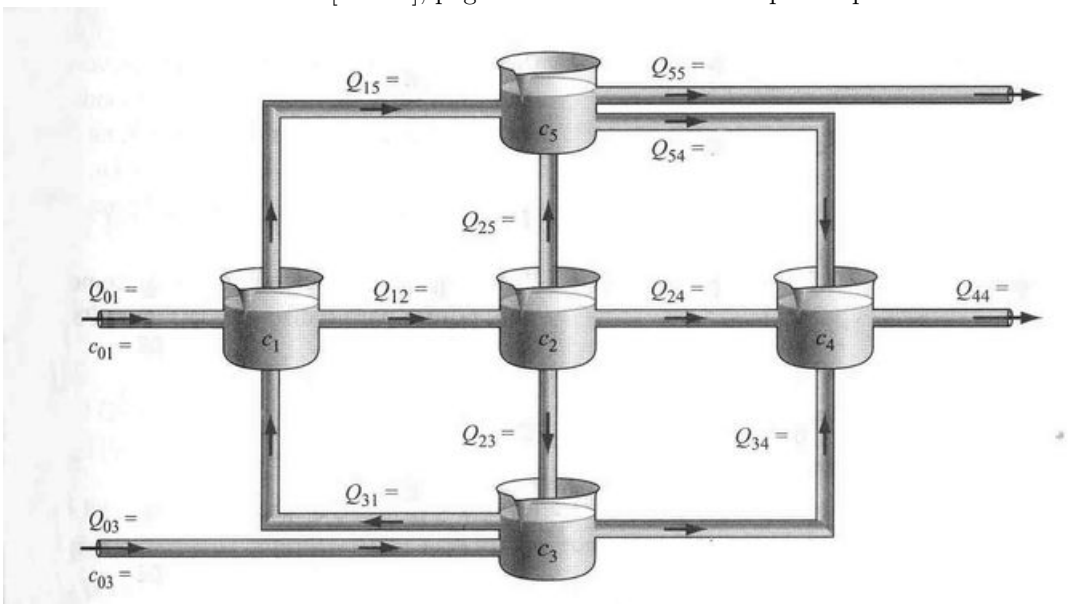
$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas.

**2. Transportando máquinas** Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

**3. Reatores** Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo

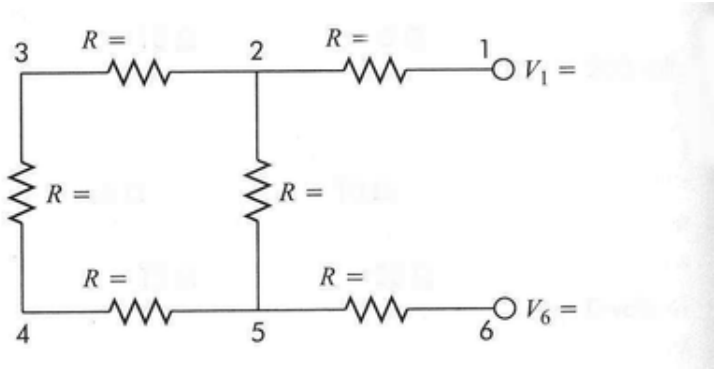



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo ($Q$) pela concentração ($c$). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

**reator 1** $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
**reator 2** $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
**reator 3** $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
**reator 4** $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
**reator 5** $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

**4. Circuito Elétrico** Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

**5. Cascalho na construção civil** Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia ($A$), cascalho fino ($F$) e cascalho grosso ($G$) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

| | Areia | C. fino | C. grosso |
|---|---|---|---|
| Mina1 | 52 | 30 | 18 |
| Mina2 | 20 | 50 | 30 |
| Mina3 | 25 | 20 | 55 |

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

Uma possíve solução em Python

```
# folha 744 de exemplo
def f744():
    import numpy as np
    print('---------------- Exercicio 1----------------')
    a=np.array([[2.8,4.5, 3.4,3.7],[5.2,10.6,5.4,3.9],
 [6.5,2.3,1.4,3.1],[1.8,8.2,5.6,1.5]],float)
    b=np.array([26.70,53.92,23.40,37.92],float)
    print(a)
    print(b)
    print(np.linalg.solve(a,b))
    print('---------------- Exercicio 2----------------')
    a=np.array([[6,4,0,7,0],[5,0,1,7,9],[7,0,7,9,9],[6,8,2,8,3],
  [7,9,5,1,8]],float)
    b=np.array([173,165,219,210,147],float)
    print(a)
    print(b)
    print(np.linalg.solve(a,b))
    print('---------------- Exercicio 5----------------')
    a=np.array([[0.35,0.34,0.33],[0.29,0.26,0.43],
  [0.36,0.40,0.24]],float)
    b=np.array([7519,7599,7066],float)
    print(a)
    print(b)
    print(np.linalg.solve(a,b))
f744()
```

 ©75-18, Pedro Kantek

## 13.21 Tomografia computadorizada

Para encerrar a discussão de sistemas lineares com uma aplicação robusta e real, vai-se trabalhar com a reconstituição de imagens que é feita pela máquina de TCA (tomografia computadorizada axial).

Começa-se a discussão pela presença muito comum de um sistema de $m$ equações a $n$ incógnitas estudando-se agora o que acontece com os diversos valores de $m$ e $n$.

Quando $m = n$, tem-se o caso estudado até aqui nas aulas anteriores, já que se as $m$ equações são linearmente independentes (nenhuma é múltipla de outra ou combinação linear de outras) o sistema tem uma única solução.

Se $m < n$ o sistema só admite solução se forem arbitrados valores **ad-hoc** para $m - n$ incógnitas.

O caso que vai ser estudado agora é $m > n$ que é o caso mais comum na realidade. Em uma rápida análise, comecemos com um sistema $m = n$ e acrescentemos ao sistema uma nova equação linearmente independente.

Para simplificar usando um caso real suponhamos 3 equações e 3 incógnitas: o sistema tem uma solução $x_1, x_2$ e $x_3$. Ao acrescentar a quarta equação o sistema deixa de ter solução exata. Mas, se pegarmos 3 dessas 4 equações (por exemplo as equações 1, 2 e 4) ele voltará a ter solução. Vamos chamá-la de $x_1, x_2$ e $x_4$. Se pegarmos as equações 1, 3 e 4, nova solução. Ao resolver o sistema com as 4 equações quer-se o ponto do espaço que minimiza a distância (mínimos quadrados) das soluções de 4 equações tomadas 3 a 3: a saber 1,2,3; 1,2,4; 1,3,4 e 2,3,4.

Esta estratégia faz todo o sentido, já que na vida real não existem soluções exatas, por diversas razões, sendo a principal a omnipresença do ruído, aqui entendido como erro (de leitura, de processamento, de transcriçao, do universo contra mim...).

Não vamos trabalhar com este algoritmo ele é bastante sofisticado, mas vão-se usar os pacotes à nossa disposição (APL, Freemat, Matlab, Python, ...). Neste último não se usa `numpy.linalg.solve` já que este exige matrizes quadradas, mas `numpy.linalg.lstsq`. Este exercício pede que você resolva um sistema com 170 equações a 64 incógnitas.

**Tomografia Computadorizada Axial** Trata-se de uma técnica que usa um computador e uma máquina de Raio X para reconstituir imagens de maneira transversal de um corpo. Originalmente na pesquisa do seu inventor, o programador inglês Godfrey Hounsfield, era apenas o cérebro humano já que este – por estar dentro de um capacete de matéria óssea: o crânio – é impermeável ao Raio-X exceto nos casos de rachaduras ou quebra. Mais tarde a técnica deu tão certo que acabou sendo adaptada a outras partes do corpo, mesmo de animais e também em alfândegas, presídios e similares para examinar o interior de qualquer coisa. A propósito até onde sei, o Hounsfield foi o único não médico a ganhar o Nobel de Medicina até hoje.

Feixes de raio X são disparados sobre o corpo em análise e ao invés de serem registrados em fotografias são entregues a um computador (a você...) para processamento. A máquina toda gira ao redor do corpo tirando muitos tomogramas do mesmo objeto. A variação angular é que vai permitir a reconstituição posterior.

O coeficiente de atenuação linear média $\mu_t$ de cada pixel é comparado com o coeficiente da água, $\mu_a$, definindo o número CT:

$CT = 1000(\mu_t - \mu_a)/\mu_a$.

A água é utilizada como referência porque seu coeficiente de atenuação é similar ao dos tecidos moles, e é um material fácil de obter para calibrar os aparelhos. O coeficiente 1000 é utilizado para obter números inteiros.

O número CT, ou coeficiente de Hounsfield, é definido como -1000 para o ar e 0 para a água.

Para os tecidos em geral, ele depende da energia do feixe empregado. Por exemplo, para 80 keV, se o coeficiente de atenuação linear típico de ossos é de 0,38 $cm^{-1}$, e da água 0,19 $cm^{-1}$, o número CT dos ossos é de +1000. Pode ser ainda maior para ossos corticais. Estes valores também variam de aparelho para aparelho, já que os coeficientes dependem da distribuição de energia do feixe. A radiação observada, $I$, está relacionada com a radiação na fonte, $I_0$, por: $I = I_0 e^{-\mu x}$.

| Tecido | CT | Tecido | CT |
|---|---|---|---|
| Ar | -1000 | Sangue | 35:55 |
| Pulmão | -900:-400 | Coágulo | 80 |
| Gordura | -110:-65 | Músculo | 40:60 |
| gua | 0 | Fígado | 50:85 |
| Rim | 30 | Osso | 130:250 |

Por convenção, altos valores de CT são imageados como branco, e baixos como preto. Como o olho humano não pode distinguir os milhares de coeficientes, utilizamos a técnica de janelas (windowing), para graficar somente os valores em uma certa faixa.

**Aquisição de dados** Na tomografia computadorizada mais comum, um tubo com um feixe de cerca de 0,6 mm de diâmetro gira em torno do paciente, e emerge do paciente sobre um detector com aproximadamente 700 sensores, que convertem a intensidade em uma corrente. Cada pulso de raio-X dura 2 a 3 ms, completando uma volta em cerca de 1 s. Cada 360° gera 300 somas.

Cada vez que o tubo emite um pulso, cada detector mede o logaritmo da intensidade que recebe. Este valor representa a soma de todos os números CT dos voxeis atravessados pelo raio, completando uma projeção. Cada voxel é atravessado pelo feixe em diferentes direções, durante a rotação do anel. O número CT de cada voxel está portanto representado em várias somas. (Estas últimas informações foram retiradas em http://www.if.ufrgs.br/ast/med/imagens/imagens.htm por Kepler de Souza Oliveira Filho).

**Algoritmo de reconstrução** Vamos pensar em uma sessão transversal de um corpo humano. Imagine também um conjunto de emissores de raio-X, colocados paralelos em uma estrutura rígida que gira em um eixo estabelecido no centro do corpo humano. No lado oposto (ultrapassado o corpo) estão os detectores do raio-X.

A medida em que a máquina gira, inumeros conjuntos de Raios-X vão sendo tomados. Para uma determinada posição angular (digamos horizontal) tem-se um conjunto de x valores de atenuação. O valor x é a quantidade de emissores e detetores, e a atenuação é a diminuição da potência do Raio-X emitido numa ponta e recebido na outra após passar pelas estruturas do corpo que está sendo estudado.

Por exemplo, na horizontal, os raios inferiores, tem que atravessar a coluna (supondo que o paciente esteja deitado de costas), ao passo que os raios superiores ou não atravessam nada, ou apenas alguma gordura (isso para os mais gordinhos). Quando a estrutura estiver tirando raios X na vertical, a coluna do paciente atenuará os raios do meio do conjunto.

Os detectores não tiram fotografias, ao invés eles mandam sinais elétricos proporcionais a potência do Raio-X recebido diretamente para um computador. Este, de posse da informação referente ao ângulo de tomada e dos valores de todos os sensores, vai reconstituindo do corpo que está sendo "cortado".

A técnica mais simples de reconstrução é a chamada "back projection", e todas as demais que vieram depois são melhoramentos e variações desta.

Sua formulação matemática é bem compacta:

$$P(\theta,t)=\int_R f(x,y)\delta(x\sin\theta-y\cos\theta-t)dxdy$$

Essa fórmula pode ser lida como: $P$ é a atenuação medida no sensor $t$, posicionado em um ângulo $\theta$ em relação ao eixo horizontal. $x,y$ são as coordenadas dos pontos da imagem e $\delta$ é um filtro que tem a função de só considerar os pontos que estão no caminho do fluxo $t$ de Raios X. Em python

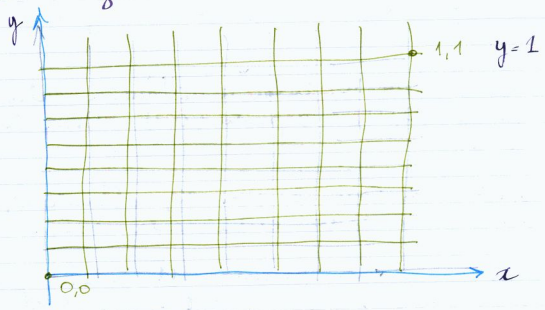
```
import numpy as np
def leitcoef():
    coef=np.zeros((680,16),float)
    ref=open("f:/n/745/f745coef.myd","r")
    lin=ref.readline()
    i=0
    while (0!=len(lin)):
 lin=lin.split()
 for j in range(0,16):
     coef[i,j]=float(lin[j])
 i=i+1
 lin=ref.readline()
    coef.resize([170,64])
    return(coef)

def leiti():
    ti=np.zeros((170),float)
    ref=open("f:/n/745/f745EXE1.myd","r")
    lin=ref.readline()
    i=0
    while (0!=len(lin)):
 ti[i]=float(lin)
 i=i+1
 lin=ref.readline()
    return(ti)
print(leitcoef())
a=leitcoef()
b=leiti()
c=np.linalg.lstsq(a,b)
ima=np.zeros((8,8),float)
k=0
xx=c[0]
for i in range(0,8):
    for j in range(0,8):
 ima[i,j]=abs(float("%8.3f" % xx[k]))
 k=k+1

print(ima)
```

A seguir, algumas imagens mostrando a solução matemática da tomografia computadorizada

 ©75-18, Pedro Kantek

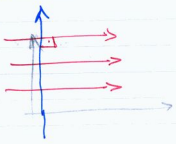
VIVO745:

Estudo a respeito da tomografia e seus algoritmos.




m ← 19 // 64 // 0

para rotacao = 0°, o eixo é vertical e os raios são perpendiculares, logo horizontais



Rotacao = 0

~~Rotação = 45~~

Achar a reta que passa por (0,0) e tem coeficiente angular igual a 0.

Que é x=0.

A intersecção procurada é o ponto (0,1). Entre a reta x=0 e y=1 é ↑

Agora deve-se achar a distância entre o ponto (0,0) e o ponto (0,1). Essa distância é 1.

Divide-se esse 1 por 10, obtendo 0,1 ~~es~~ de separação entre cada raio.

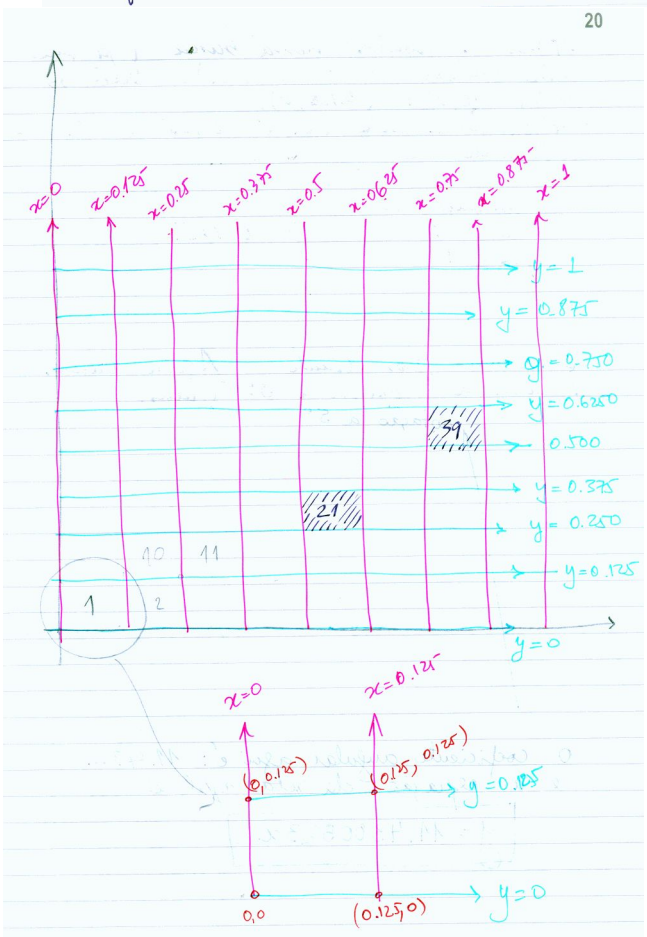
Agora vamos procurar 11 retas que passam por (0,0), (0,0.1), (0,0.2), ... (0,0.9) e (0,1) e são perpendiculares a x=0

São elas: y=0, y=0.1, y=0.2, ... y=0.9 e y=1.

Agora vamos varrer os 64 pixels e para cada pixel:

analisar a reta y=0 com as 4 retas delimitadoras do pixel 1. como se pode ver no desenho ao lado

reta (y=0) intersecção com a reta (y=0) => infinitos
(y=0) com (y=0.125) => nenhum ponto
(y=0) com a reta (x=0) => só 1 ponto 0,0
(y=0) com a reta (x=0.125) só 1 ponto (0.125, 0)




Achei 2 pontos nessa busca (já que neste contexto ∞ = nenhum). São os pontos (0,0) e (0.125, 0).
A distância entre eles é 0.125 e este é o coeficiente de

rotacao 0
raio 1
pixel 1
} 0.125.

e assim por diante. Agora vamos simular a rotação a 5° graus.

O coeficiente angular aqui é: 11.43... e a equação da reta azul é

y = 11.4300523x

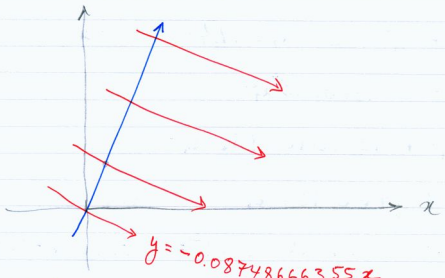
21

Agora vai-se procurar a interseccao da reta $y = 1$ com a reta $y = 11.4300523x$.

Acha-se o ponto $(0.08748866353, 1)$

A distância entre o ponto $(0,0)$ e o ponto $(0.08748\ldots, 1)$ é de $1.003819838$

Divide-se este valor por 10 obtendo-se $0.1003819838$




Então, a questão agora é a reta que passa por 0,0 e ~~tem~~ é perpendicular a $y = 11.4300523x$ que é

$y = -0.0874\ 8866355\ x$

A segunda reta é a reta que passa pelo ponto que esta na reta $y = 11.4300523x$ e está à distância $2 * 0.1003819838 = 0.2.00763967 6$ do ponto (0.0) e é perpendicular a $y = 11.4300523x$

Agora precisa-se achar o ponto sob a reta $y = 11.4300523x$ e está à uma distância conhecida de 0,0.

Então dada uma reta, um ponto e uma distância quer-se o outro ponto.

da fórmula pitagórica

$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ e sabendo-se que $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$ fica

$d^2 = x_1^2 + y_1^2$ e $y = 11.4300523x$

$d^2 = x_1^2 + 11.4300523^2 x_1^2$

$d^2 = x_1^2 + 130.6460956\ x_1^2$

$d^2 = 131.6460956\ x_1^2$

$d = 0.200763967 6$ e $d^2 = 0.04030617069$

e $x_1^2 = 0.04030617069 / 131.6460956$

e $x_1 = 0.0174977327 6$ e $y_1 = 0.20000000$

A questão agora é a reta perpendicular a $y = 11.4300523x$ e que passa por $x_1 = 0.0174977327 6$ e $y_1 = 0.2$.

22

A dito o coeficiente angular desta nova reta perpendicular é $-0.08748866355$

A reta procurada é $y - y_1 = m(x - x_1)$ onde $x_1$ e $y_1$ são os pontos onde ela passa.

A reta procurada é

$y - 0.2 = -0.08748866355(x - 0.0174977327 6)$

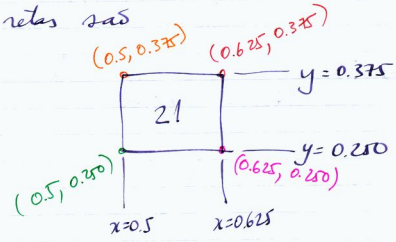
ou

$y = -0.08748866355x + 0.2015308533$

Agora deve-se examinar esta reta vis-à-vis as 4 retas delimitadoras do pixel em análise.

Considerando o pixel 21 (por hipótese)

Suas retas são




Vamos às intersecções:

1. da reta $x = 0.5$ com a reta $y = -0.08x + 0.201$ que dá o ponto: $(0.5, 0.161)$
2. da reta $x = 0.625$ com a reta $y = 0.08x + 0.201$ que dá o ponto: $(0.625, 0.151)$
3. da reta $y = 0.25$ com a reta $y = -0.08x + 0.201$ que dá:

$y = -0.08x + 0.201$ e $y = 0.25$

$0.25 = -0.08x + 0.201$

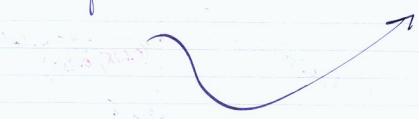
$0.25 - 0.201 = -0.08x$

$0.049 = -0.08x$

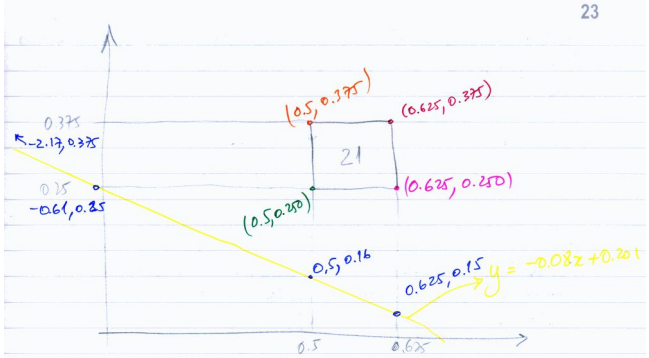
$x = -0.6125$ e o ponto procurado é $(-0.6125, 0.25)$

4. da reta $y = 0.375$ com a reta $y = 0.08x + 0.201$ que dá $(-2.175, 0.375)$

graficamente este estado de coisas ficou assim



 ©75-18, Pedro Kantek




O ponto é: as coordenadas dos pontos estão dentro (ainda que no limite) dentro do pixel?

Vejamos:

Ponto 1:
coord. x => $0.5 \leq -2.17 \leq 0.625$ ✗ E
coord y => $0.25 \leq 0.375 \leq 0.375$ ✓?

Resposta: não

Ponto 2: $0.5 \leq 0.625 \leq 0.625$ ✓ E
$0.25 \leq 0.151 \leq$ ~~0.625~~ 0.375 ✗ => NÃO

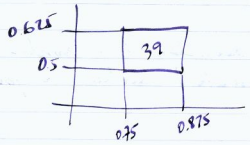
Ponto 3: $0.5 \leq -0.6125 \leq 0.625$ ✗ E
$0.25 \leq 0.25 \leq 0.375$ ✓ => NÃO

Ponto 4: $0.5 \leq -2.175 \leq 0.625$ ✗ E
$0.25 \leq 0.375 \leq 0.375$ ✓ => NÃO

Como a quantidade de pontos incluídos no pixel é Ø (zero), o coeficiente da rotação 5

raio 1
pixel 21 é Zero.

Para terminar esta redação matemática, vamos pegar a rotação de 35°, raio 6 e pixel 39.




35° => $y = 1.428148007x$ e a reta perpendicular a esta é $y = -0.700x$

Como é o raio 6, tem-se:

a intersecção da reta $y = 1,428148007x$ e a reta $y = 1$

nos dá o ponto
$1 = 1.428148007x$
$x = 0.700207538$ e

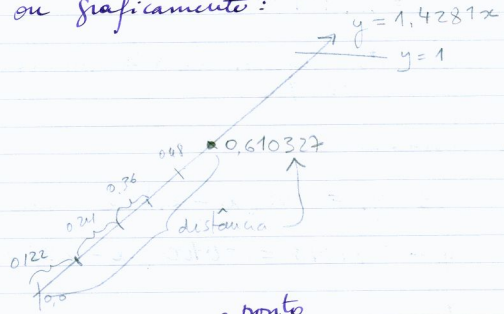
portanto o ponto é (0.700, 1)



A distância entre (0,0) e (0.700, 1) é

$d^2 = (0.700)^2 + 1^2$
$= 0.49 + 1$
$d^2 = 1.49$
$d = \sqrt{1.49} = 1.220655562$

que dividido por 10 dá = 0.122065...
ou graficamente:




Precisa-se achar o ponto ~~a reta~~ que ~~passa por~~ está em $y = 1.4281x$ e que está a 0.610327 da origem.

$d^2 = x_1^2 + 1.4281x^2$
$0.610327^2 = x_1^2 + (1.4281^2) \cdot x_1^2$

$0.372499 = x_1^2 + 2.0394\, x_1^2$
$0.372499 = 3.0394\, x_1^2$

$x_1^2 = \frac{0.372499}{3.0394} = 0.122554$

$x_1 = \sqrt{0.122554} = 0.35007$

retornando à equação da reta original acha-se o ponto que é

(0.35007, 0.49993)

Agora, a reta que passa por (0.35007, 0.49993) e é perpendicular à reta

$y = 1.428148x$.

O coeficiente angular da reta procurada é $-0.700$.

a fórmula é

$y - y_1 = m(x - x_1)$ e fica:

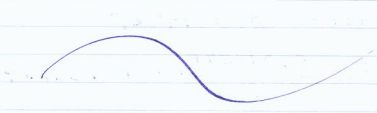
$y - 0.49993 = -0.700(x - 0.35007)$

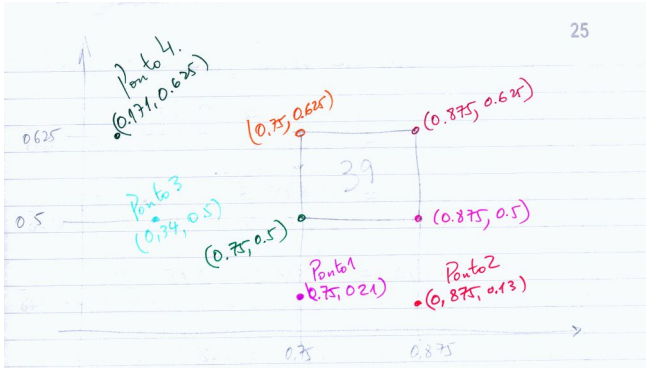
ou

$y - 0.49993 = -0.700x + 0.245049$

$y = -0.700x + 0.744979$ que é a reta procurada

agora vamos de novo à análise gráfica:






a reta é $y = -0.700x + 0.744979$

Análise dos 4 pontos de interseccao:

da reta $y = -0.700x + 0.7449$ com a reta $x = 0.75$ ⟶ dá o ponto (0.75, 0.2199).

com a reta $x = 0.875$ ⟶ dá o ponto (0.875, 0.1319)

com a reta $y = 0.5$, tem-se
$0.5 = -0.700x + 0.7449$ ou
$0.5 - 0.7449 = -0.700x$
$-0.2449 = -0.700x$ e $x = \frac{0.2449}{0.700}$
$x = 0.3498$,
e o ponto é (0.3498, 0.5)

com a reta $y = 0.625$, tem-se
$0.625 = -0.700x + 0.7449$ ou
$-0.1199 = -0.700x$ e $x = \frac{-0.1199}{-0.7}$
$x = 0.171285$ e o
ponto é (0.171285, 0.625)

Agora a análise final para os 4 pontos:

$P_1 - x$: $0.75 \leq 0.75 \leq 0.875$ E
$P_1 - y$: $0.5 \leq 0.21 \leq 0.625$ — NÃO

$P_2 - x$: $0.75 \leq 0.875 \leq 0.875$ E
$P_2 - y$ $0.5 \leq 0.13 \leq 0.625$ — NÃO

$P_3 - x$: $0.75 \leq 0.34 \leq 0.875$ E
$P_3 - y$ $0.5 \leq 0.5 \leq 0.625$ — NÃO

$P_4 - x$: $0.75 \leq 0.17 \leq 0.875$ E
$P_4 - y$: $0.5 \leq 0.625 \leq 0.625$ — NÃO

Logo: o coeficiente buscado para rotação 35°, raio 6 e pixel 39 é Zero

Se, ao contrário 2 pontos tivessem caído dentro do pixel, haveria que:

a) calcular a distância entre esses 2 pontos

b) o coeficiente buscado para uma rotação nesse raio e nesse pixel, seria o valor a) acima.

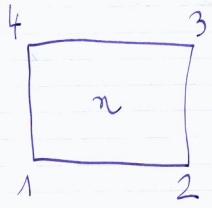


para preencher a matriz pontos

pontos ← 64 4 2 ρ Ø.

pontos [38]

criei a função APL chamada preenchepontos, que aparentemente funcionou muito bem criando a variável PONTOS



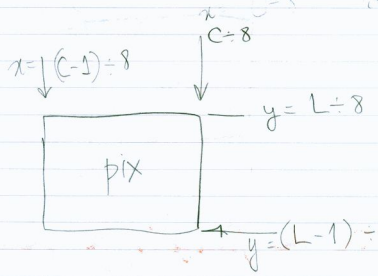

## Lista de funções a desenvolver:

1. Dada uma reta na forma $y = ax$ (ié: a) devolver o ponto de intersecção dessa reta com a reta $y = 1$ que limita o corpo na porção superior r ← retapix a

2. Dada uma reta (a em $y = ax + b$) já que esta reta passa pela origem e uma distância devolver a reta (a, b) perpendicular à reta dada que passa pelo ponto especificado
r ← d reper a

3. Dada uma reta (a, b) e um pixel ($1 \leq p \leq 64$) estudar as intersecções dessa reta com as retas formadoras do pixel Devolver 4 pontos
r ← p est4p (a, b)

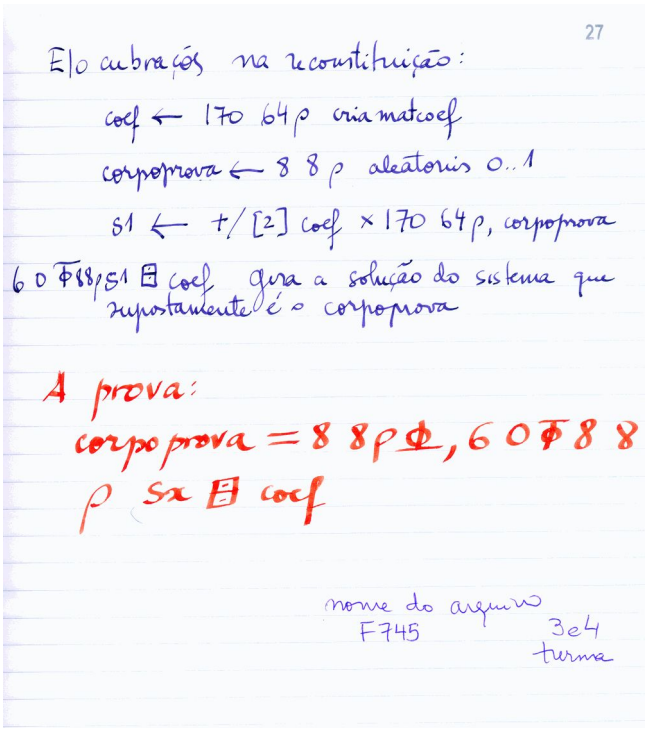
4. Dados 4 pontos e um número de pixel determinar a possível distância entre 2 deles. Não havendo, deve retornar zero r ← p distpix p1 p2




pix — L, C

L=3 { y=0.375, y=0.25 }  C=5 { x=0.5, x=0.625 }

 ©75-18, Pedro Kantek




Embora não seja objetivo deste texto, não resisto a incluir as soluções em APL, já que as soluções em Python (acima incluídas) estão muito prét-a-porter, ou seja estão prontinhas...

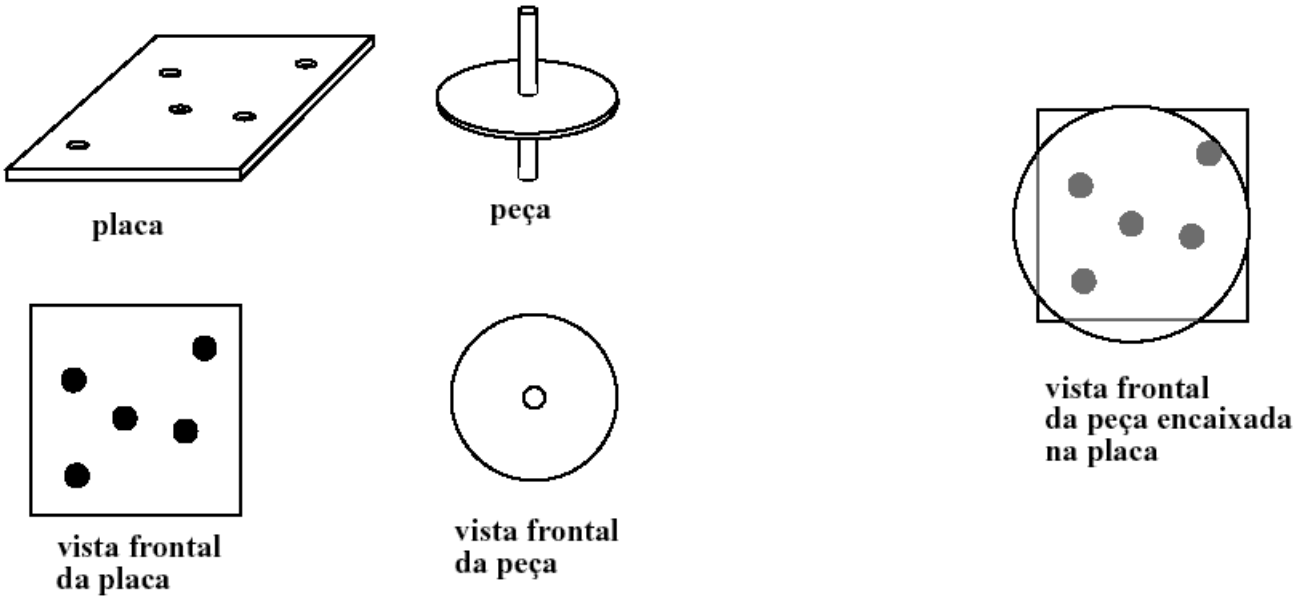
```
    ∇
 [0] r←criamatcoef;distancia;idi;ipi;irot;m;rotacao;rr;rr1;vetdis
 [1] ⍝ cria a matriz de coeficientes para o sistema linear da tomografia
 [2] ⍝ 17 x 9 x 64 = 19 rotacoes, 9 raios e 64 pixels na imagem.
 [3] m←17 10 64⍴0
 [4] irot←1
 [5] t1:→(irot>17)/fim
 [6]
 [7] ⍝-------------------inicio do ciclo ----------------------
 [8] rotacao←3○(○90-irot×5)÷180
 [9] rr←retapi rotacao
[10] distancia←(rr,1)dp 0,0
[11] vetdis←distancia÷⍳10
[12] idi←1
[13] t2:→(idi>10)/oba
[14] rr1←vetdis[idi]reper rotacao
[15] ipi←1
[16] t3:→(ipi>64)/oga
[17] m[irot;idi;ipi]←ipi distpix ipi est4p rr1
[18] ipi←ipi+1
[19] →t3
[20] oga:idi←idi+1
[21] →t2
[22] oba:irot←irot+1
[23] →t1
[24] fim:r←m
    ∇

    ∇
 [0] r←retapi a
 [1] ⍝ devolve o ponto de interseccao da reta y=ax com a reta y=1
 [2] r←÷a
    ∇

    ∇
 [0] r←a dp b
 [1] ⍝ devolve a distancia pitagorica entre o ponto a e o ponto b
```

```
 [2] r←(((a[1]-b[1])*2)+((a[2]-b[2])*2))*0.5
    ∇


    ∇
 [0] r←d reper a;x;y
 [1] x←((d*2)÷(1+a*2))*0.5
 [2] y←x×a
 [3] r←x,y
    ∇
 [0] r←p est4p ab;lc;p1;p2;p3;p4;l;c
 [1] lc←achalc p
 [2] l←lc[1]
 [3] c←lc[2]
 [4] õneste ponto reta superior→y=l÷8, inferior→y=(l-1)÷8, esq→x=(c-1)÷8 dir→x=c÷8
 [5] p1←((((l-1)÷8)-ab[2])÷ab[1]),(l-1)÷8  õ mantem y
 [6] p2←(((l÷8)-ab[2])÷ab[1]),l÷8   õ mantem y
 [7] p3←((c-1)÷8),(ab[1]×((c-1)÷8))+ab[2] õ mantem x
 [8] p4←(c÷8),(ab[1]×c÷8)+ab[2]       õ mantem x
 [9] r←4 2⍴p1,p2,p3,p4
    ∇

    ∇
 [0] r←p distpix pts;l;c;lc;p1;p2;p3;p4;ap1;ap2;ap3;ap4;quais
 [1] õ acha uma possivel distancia dentro do pixel (coeficiente do sistlin)
 [2] lc←achalc p
 [3] l←lc[1]
 [4] c←lc[2]
 [5] p1←pts[1;]
 [6] p2←pts[2;]
 [7] p3←pts[3;]
 [8] p4←pts[4;]
 [9] õanalise de p1:
[10] ap1←((p1[1]≥((c-1)÷8))^(p1[1]≤(c÷8)))^((p1[2]≥((l-1)÷8))^(p1[2]≤l÷8))
[11] ap2←((p2[1]≥((c-1)÷8))^(p2[1]≤(c÷8)))^((p2[2]≥((l-1)÷8))^(p2[2]≤l÷8))
[12] ap3←((p3[1]≥((c-1)÷8))^(p3[1]≤(c÷8)))^((p3[2]≥((l-1)÷8))^(p3[2]≤l÷8))
[13] ap4←((p4[1]≥((c-1)÷8))^(p4[1]≤(c÷8)))^((p4[2]≥((l-1)÷8))^(p4[2]≤l÷8))
[14] quais←(ap1,ap2,ap3,ap4)/⍳4
[15] →(2≠⍴quais)/zero
[16] r←pts[quais[1];]dp pts[quais[2];]
[17] →0
[18] zero:r←0
    ∇
```

## 13.22 Cubra os furos

Uma placa de aço retangular contém N furos circulares de 5 mm de diâmetro, localizados em pontos distintos, não sobrepostos – ou seja, o centro de cada furo está a uma distância maior ou igual a 5 mm do centro de todos os outros furos. Uma peça de forma circular, tendo em seu centro um eixo de 5 mm de diâmetro, deve ser colocada sobre a placa, de modo que o eixo encaixe-se em um de seus furos.

 ©75-18, Pedro Kantek




**Tarefa** Você deve escrever um programa para determinar o diâmetro mínimo que a peça deve ter de tal forma que, com seu eixo encaixado em um dos furos da placa, a parte circular cubra completamente todos os outros furos da placa.

**Entrada** A entrada é composta de vários conjuntos de teste. Cada linha de um conjunto de teste contém N pares de valores inteiros X e Y, separados por um espaço em branco, que descrevem a posição do centro de um furo (-10000 $\leq$ X $\leq$ 10000 e -10000 $\leq$ Y $\leq$ 10000). Os pares são separados por um ";". A unidade de medida das coordenadas dos furos é 1 mm. A seguir um exemplo

```
20 25 ; 10 5 ; 10 10  e  0 5 ; 10 0 ; 0 10
```

**Saída** Para cada conjunto de teste da entrada seu programa deve produzir o diâmetro mínimo que a peça deve ter, como um número real com 2 casas decimais. A saída para o exemplo acima é 41.05 e 27.33

Em python:

```
def furos():
    import numpy as np
    x=np.array([[76,58],[20,33],[35,27],[24,28],[30,63]])
    d=np.zeros((5,5))
    t=len(x)
    mx=np.zeros((t))
    for i in range(t):
 for j in range(t):
     d[i][j]=2*(2.5+(((x[i][0]-x[j][0])**2)+((x[i][1]-x[j][1])**2))**0.5)
    print(d)
    for i in range(t):
 maximo=-9999
 for j in range(t):
     if d[i][j]>maximo:
  maximo=d[i][j]
 mx[i]=maximo
    mn=99999
    for i in range(t):
 if mx[i]<mn:
     mn=mx[i]
    print(mn)

furos()
```

**micróbio** Um micróbio tem um comportamento digno de nota. A cada $n$ horas, ele joga uma moeda: se der cara ele morre. Se der coroa, ele se divide em $k$ filhotes que crescem e depois de $n$ horas voltam a jogar a moeda. Supondo uma infestação de $z$ micróbios, ESCREVA UM PROGRAMA CAPAZ DE SIMULAR A SITUAÇÃO E INFORME EM QUANTOS DIAS SE CHEGARÁ À UMA POPULAÇÃO DE 1.000 INDIVÍDUOS , o que segundo as últimas pesquisas passa a ser mortal para o hospedeiro. Note que há alimentação abundante e nenhum outro risco de morte para o miasma, exceto aquele aqui descrito.

O programa deve ler os valores de $z$, $n$ e $k$. Como existe uma variável aleatória (a cara e coroa), um único resultado não pode ser aceito como definitivo. Faça uma simulação de pelo menos 4 execuções e responda com a média das populações.

Uma solução em Python:

```
def microbio(z,n,k):
    import random
    pop=z
    horas=0
    while pop<1000:
       horas=horas+n
       pop1=pop
       if pop1 < 1:
  print("zerou a populacao")
  return
#      print(pop1)
       for j in range(pop1):
  a=random.randint(0,1)
  if a==1:
     pop=pop-1
  else:
     pop=pop+k
   dias=horas/24
   return dias

def muitos():
    ct=0
    dd=0
    z=int(input("informe população inicial (z) "))
    n=int(input("informe a quantidade horas de ciclo (n) "))
    k=int(input("informe filhotes a cada divisão (k) "))
    while ct<1000:
       dd=dd+microbio(z,n,k)
       ct=ct+1
    print(dd/1000)

muitos()
```

Para gerar um (pseudo-) aleatório em Python, pode fazer:

```
from random import randint
a=randint(0,1) # a=0:cara, a=1:coroa
```

Para verificar o "acerto" (relativo) do seu código eis algumas execuções: (todas com 1000 execuções)

| z | n | k | média em dias |
|---|---|---|---|
| 35 | 8 | 9 | 0.92 |
| 23 | 13 | 5 | 2.17 |
| 50 | 8 | 4 | 1.30 |
| 12 | 26 | 7 | 4.10 |

Se a contagem da população chegar a zero na avaliação, esta rodada deve ser desprezada e não deve entrar na média.

**Troco** Você foi contratado como programador para gerar o código de uma máquina distribuidora de troco em moedas. Supondo que no país em tela existem moedas de 1 unidade, 50, 25, 10, 5 e 1 centavo, e imaginando que você deve privilegiar sempre as moedas de maior valor, ESCREVA UM PROGRAMA QUE RECEBA UM CERTO VALOR DE COMPRA E O VALOR DA NOTA QUE O FREGUÊS ENTREGOU PARA PAGAR A COMPRA. O SEU PROGRAMA DEVE INFORMAR QUANTAS E QUAIS MOEDAS DEVEM SER DEVOLVIDAS DE TROCO, SEMPRE TENTANDO OFERECER O MAIOR NÚMERO DAS MOEDAS DE MAIOR VALOR.

Esta estratégia de solução é chamada *gulosa* e muitas vezes ela é ótima (deixa de sê-lo, por exemplo em uma distribuição de moedas não convencional: por exemplo havendo moedas de 100, 50, 16, 5 e 1 centavos. Neste caso um troco de 20 centavos é calculado com 0,0,1,0,4 no total de 5 moedas enquanto um resultado melhor seria 4 moedas de 5 centavos).

Use a seguinte tabela de exemplos, para testar seu código:

| compra | pag | troco | moedas |
|---|---|---|---|
| 15.96 | 50 | 34.04 | 34 0 0 0 0 4 (t=38) |
| 17.11 | 20 | 2.89 | 2 1 1 1 0 4 (t=9) |
| 8.88 | 10 | 1.12 | 1 0 0 1 0 2 (t=4) |

```
def moedas(compra,nota):
  moedas=[0]*6
  compra=int(compra*100)
  nota=nota*100
  troco=nota-compra
  while troco>=100:
    moedas[0]=moedas[0]+1
    troco=troco-100
  while troco>=50:
    moedas[1]=moedas[1]+1
    troco=troco-50
  while troco>=25:
    moedas[2]=moedas[2]+1
    troco=troco-25
  while troco>=10:
    moedas[3]=moedas[3]+1
    troco=troco-10
  while troco>=5:
    moedas[4]=moedas[4]+1
    troco=troco-5
  moedas[5]=int(troco)
  print(sum(moedas))


# aqui o python deu uma engrossada: tente fazer 8.88,10 e
# deixe de fora o int(compra*100). Ele faz **rda.
```

**egípcios** Os egipcios antigos (há mais de 5.000 anos) já conheciam o conceito de $\pi$ – não com esse nome, claro, mas como a constante que iguala o comprimento de uma circunferência ao seu raio. Como eles não dominavam a aritmética real que temos hoje, $\pi$ era representado por uma fração ordinária, nomeadamente 22/7.

Seu problema aqui é receber um número real qualquer com bastantes casas decimais e localizar qual a fração de números inteiros que chega mais perto do valor do número real original.

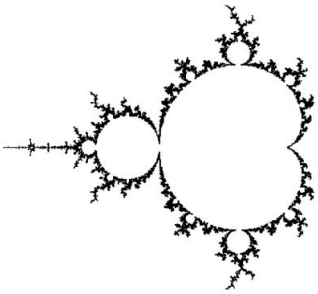
Numa primeira abordagem ambos – numerador e denominador – devem ser menores do que 100 (ou seja, com 2 dígitos) e no segundo caso devem ser menores do que 1000 (ou seja, com 3 dígitos).

Veja-se alguns exemplos

| número | n | d |
|---|---|---|
| 3.141592654 c/ 2 dígitos | 22 | 7 |
| 3.141592654 c/ 3 dígitos | 355 | 113 |
| 2.718281828 c/ 2 dígitos | 87 | 32 |
| 2.718281828 c/ 3 dígitos | 878 | 323 |
| 5.67891234 c/ 2 dígitos | 91 | 16 |
| 5.67891234 c/ 3 dígitos | 619 | 109 |

```
def egipcio(nr,lim): # lim deve ser 100 ou 1000
  minimo=+999999
  i=1
  while i<lim:
    j=1
    while j<lim:
      ca=i/j
      if (abs(nr-ca))<minimo:
 minimo=abs(nr-ca)
 mini=i
 minj=j
      j=j+1
    i=i+1
  return [mini,minj]

print (egipcio(3.14159265,100))
print (egipcio(3.14159265,1000))
```

**fractal de Mandelbroot** O fractal de Mandelbroot é um objeto matemático fascinante. É um dos poucos que pode ser visto e ele tem o seguinte aspecto



Para sua construção, estuda-se o comportamento de um número complexo $(a + bi)$. Relembrando um pouco da aritmética complexa, recorde-se que podem-se operar dois complexos usando a adição, subtração, multiplicação e divisão.

Todas elas são realizadas como se os números x e y (complexos) fossem polinômios na variável i. Assim temos:
$(3 + 4i) + (2 + i) = 5 + 5i$
$i + (2 + i) = 2 + 2i$
$2 + 3 = 5$
$(3 + I) \times (2 - I) = 7 - I$

Isto posto, o conjunto de mandelbroot (CM), é obtido através da análise de todos os pontos de um conjunto que está no plano de Argand Gauss. O conjunto de Mandelbrot é o conjunto de todos os números complexos c tais que após um certo número de iterações $z = z^2 + c$, $z$ não tende para infinito. O valor inicial de $z$ é zero.

Mediante uma análise matemática simples, determina-se se para cada ponto, se ele pertence ou não ao CM. Pintando-se de uma cor a uns e de outra a outros, obtem-se uma visualização do CM, que tem o aspecto visto acima.

Para cada ponto do plano complexo (ou melhor dizendo para cada ponto de uma grade sobre o plano complexo), far-se-á uma seqüência de iterações. Se ao final dessa seqüência, o resultado final estiver fora do círculo de raio = 2, o ponto está fora do CM. Se o resultado for menor que 2, o ponto está dentro do CM. Embora o cálculo correto fosse testar o ponto contra infinito, pode-se fazer o teste com 2. (Se o ponto ultrapassa 2, ele tenderá ao infinito).

A fórmula da iteração é:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

, onde $z_0 = 0 + 0i$ e $c$ é o ponto que está sendo testado.

É claro que para decidir se o ponto está ou não dentro do círculo de raio = 2, há que se ter um ponto de parada. Não se pode testar um ponto ao infinito. Se, nas primeiras 1000 iterações o ponto não saiu do círculo, não há garantia de que na vez 1001 ele não vá sair.

Portanto, a definição do CM é: O conjunto de pontos do plano complexo, que após iterados k vezes, segundo a fórmula $z_{n+1} = z_n^2 + c$ não caem fora do círculo de raio = 2.

Esta definição estaria ótima para pintar o fractal em 2 cores (pertence ou não pertence), mas há um truque que torna os fractais muito mais bonitos: a cor.

É hora de fazer uma distinção entre Fractal de Mandelbrot e Conjunto de Mandelbrot. O conjunto é apenas a reunião dos pontos que satisfazem a iteração acima. O fractal é um desenho formado por esse conjunto e pelos pontos externos, todos eles pintados de alguma maneira especificada.

**Uso da Cor** Para o exercício a seguir, você deve usar a seguinte tabela de cores fuga do raio = 2

| | |
|---|---|
| em menos de 3 iteracoes | cor preto |
| em 4 iterações | cinza |
| em 5 iterações | marrom |
| em 6 | vermelho |
| em 7 | amarelo |
| em 8 | rosa |
| em 9 | verde claro |
| de 10 a 14 (inclusive) | roxo |
| de 15 a 19 | laranja |
| de 20 a 29 | verde escuro |
| de 30 a 49 | azul claro |
| de 50 a 74 | creme |
| de 75 a 99 | azul escuro |
| não foge antes de 100 | branco |

**Exemplos** A seguir, alguns exemplos de pontos e suas cores

```
0.1655 0.268 -> 23 (verde escuro)
0.8733 0.4979 -> 4 (cinza)
0.5505 0.3246 -> 5 (marrom)
0.1091 0.1443 -> -1 (não sai do raio=2)
```

 ©75-18, Pedro Kantek

No exercício a seguir você deve descobrir de que cor deve ser pintado o pixel correspondente às seguintes coordenadas iniciais (obviamente seguindo a lista de cores acima) Uma solução em Python

```
#mandelbroot
def mandelb(c):
  i=1
  zn=0+0j
  while i<=200:
    i=i+1
    zp=zn**2+c
    print(zp)
    hip=abs(zp)
    if hip>2:
      return i
    zn=zp
  return -1
print(mandelb(0.5861+0.5224j))
print(mandelb(0.4163+-.5544j))
```

**OBI 2018: fase 1 - Álbum da Copa** Em ano de Copa do Mundo de Futebol, o álbum de figurinhas oficial é sempre um grande sucesso entre crianças e também entre adultos. Para quem não conhece, o álbum contém espaços numerados de 1 a N para colar as figurinhas; cada figurinha, também numerada de 1 a N, é uma pequena foto de um jogador de uma das seleções que jogará a Copa do Mundo. O objetivo é colar todas as figurinhas nos respectivos espaços no álbum, de modo a completar o álbum (ou seja, não deixar nenhum espaço sem a correspondente figurinha).

As figurinhas são vendidas em envelopes fechados, de forma que o comprador não sabe quais figurinhas está comprando, e pode ocorrer de comprar uma figurinha que ele já tenha colado no álbum.

Para ajudar os usuários, a empresa responsável pela venda do álbum e das figurinhas quer criar um aplicativo que permita gerenciar facilmente as figurinhas que faltam para completar o álbum e está solicitando a sua ajuda.

Dados o número total de espaços e figurinhas do álbum, e uma lista das figurinhas já compradas (que pode conter figurinhas repetidas), sua tarefa é determinar quantas figurinhas faltam para completar o álbum.

**Entrada**
A primeira linha contém um inteiro N indicando o número total de figurinhas e espaços no álbum. A segunda linha contém um inteiro M indicando o número de figurinhas já compradas. Cada uma das M linhas seguintes contém um número inteiro X indicando uma figurinha já comprada.

**Saída**
Seu programa deve produzir uma única linha contendo um inteiro, o número de figurinhas que falta para completar o álbum.

**Restrições**
$1 \leq N \leq 100$
$1 \leq M \leq 300$
$1 \leq X \leq N$

**Exemplos**

```
10 3 5 8 3
7

5 6 3 3 2 3 3 3
3

3 4 2 1 3 3
0
```

Solução em Python

```
# figurinhas
def figura(x):
  z=[0]*x[0] # tamanho do album
  i=1
  while i<=x[1]: #quantas figurinhas
    z[x[i+1]]=1
    i=i+1
```

```
  ct=0
  i=0
  while i<x[0]:
    if z[i]==0:
      ct=ct+1
    i=i+1
  return ct

print(figura([5,6,3,3,2,3,3,3]))
```

**OBI 2018: Fase 2 - Cápsulas** O discípulo Fan Chi'ih retornou recentemente da China com algumas cápsulas mágicas, que são capazes de produzir moedas de ouro! Uma cápsula possui um certo ciclo de produção, que é um número C de dias. A cada C dias a cápsula produz uma nova moeda; a moeda é sempre produzida no último dia do ciclo. Fan Chi'ih vai ativar todas as cápsulas ao mesmo tempo e quer acumular uma fortuna de pelo menos F moedas. Ele precisa da sua ajuda para computar o número mínimo de dias para que as cápsulas produzam, no total, pelo menos F moedas. Na tabela abaixo, por exemplo, existem três cápsulas com ciclos de 3, 7 e 2 dias. Se Fan Chi'ih quiser acumular pelo menos 12 moedas, ele vai ter que esperar pelo menos 14 dias.

| | | dia | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| cápsula | ciclo | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| 1 | 3 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | |
| 2 | 7 | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 |
| 3 | 2 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | | 1 |

**Entrada**

A primeira linha da entrada contém dois inteiros $N$ e $F$, indicando o número de cápsulas e o número de moedas que Fan Chi'ih quer produzir, respectivamente. A segunda linha contém $N$ inteiros $C_i$, para $1 \leq i \leq N$, representando os ciclos de cada cápsula.

**Saída**

Imprima um inteiro, representando o número mínimo de dias para que as cápsulas produzam, no total, pelo menos F moedas.

**Restrições**

$1 \leq N \leq 10^5$
$1 \leq F \leq 10^9$ e
$1 \leq C_i \leq 10^6$

Em todos os casos de teste, a resposta é sempre menor ou igual a $10^8$ dias; Em todos os casos de teste, o número de moedas produzido, no total, após $10^8$ dias, é sempre menor ou igual a $10^9$.

**Exemplos**

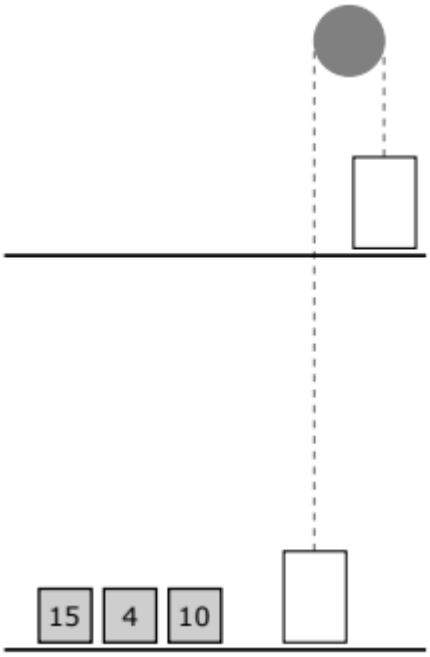
```
3 12 3 7 2
14

10 100 17 13 20 10 12 16 10 13 13 10
130
```

Solução em Python

```
# moedas
def moedas(x):
  n=x[0]
  f=x[1]
  i=1
  ct=0
  while 1==1:
    j=1
    while j<=n:
      if i%x[j+1]==0:
        ct=ct+1
        if ct>=f:
          return i
      j=j+1
    i=i+1
print(moedas([3,12,3,7,2]))
print(moedas([10,100,17,13,20,10,12,16,10,13,13,10]))
```

 ©75-18, Pedro Kantek

**OBI 2018: Fase J (júnior) - Pesos** Uma fábrica instalou um elevador composto de duas cabines ligadas por uma roldana, como na figura.




Quando uma cabine sobe, a outra desce. No primeiro andar da fábrica existem algumas caixas de pesos diversos e precisamos levar todas as caixas para o segundo andar, usando o elevador. Apenas uma caixa pode ser colocada por vez dentro de uma cabine. Além disso, existe uma restrição de segurança importante: durante uma viagem do elevador, a diferença de peso entre as cabines pode ser no máximo de 8 unidades. De forma mais rigorosa, $P - Q \leq 8$, onde $P$ é o peso da cabine mais pesada e $Q$, o peso da cabine mais leve. O gerente da fábrica não está preocupado com o número de viagens que o elevador vai fazer. Ele apenas precisa saber se é possível ou não levar todas as caixas para o segundo andar. No exemplo da figura, podemos levar todas as três caixas usando a seguinte sequência de seis viagens do elevador:

1. Sobe a caixa de peso 4, desce a outra cabine vazia; (diferença de 4)
2. Sobe a caixa de peso 10, desce a caixa de peso 4; (diferença de 6)
3. Sobe a caixa de peso 15, desce a caixa de peso 10; (diferença de 5)
4. Sobe a caixa de peso 4, desce a outra cabine vazia; (diferença de 4)
5. Sobe a caixa de peso 10, desce a caixa de peso 4; (diferença de 6)
6. Sobe a caixa de peso 4, desce a outra cabine vazia. (diferença de 4)

Dados os pesos de $N$ caixas no primeiro andar, em ordem crescente, seu programa deve determinar se é possível ou não levar todas as N caixas para o segundo andar.

**Entrada**
A primeira linha da entrada contém um inteiro $N$ indicando o número de caixas. A segunda linha da entrada contém $N$ inteiros representando os pesos das caixas, **em ordem crescente**.

**Saída**
Imprima uma linha na saída. A linha deve conter o caracter $S$ caso seja possível, ou $N$ caso não seja possível levar todas as caixas até o segundo andar da fábrica.

**Restrições**
$1 \leq N \leq 10^4$
O peso das caixas está entre 1 e $10^5$ inclusive.

**Exemplos**

```
3
4 10 15
S

8
```

```
2 6 15 20 25 35 35 40
N

4
10 14 20 23
N

1
8
S
```

Solução em Python

```
# pesos
def pesos(x):
  i=x[0]-1
  while i>2:
    if x[i]-x[i-1]>8:
      return 'N'
    i=i-1
  if x[1]>8:
    return 'N'
  return 'S'
print(pesos([3,4,10,15]))
print(pesos([8,2,6,15,20,25,35,35,40]))
print(pesos([4,10,14,20,23]))
print(pesos([1,8]))
```

**Enigma** A máquina Enigma

```
# maquina enigma
a= "ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ"
r1="CDZRMGHXAWQVUFSBPLTOEIYNKJ"
r2="VEWOASXDHRCYQJNPTKBLMFUZGI"
r3="IPRNFMWOZJQCXGTDBKELYVAHSU"
r4="DQNTSXZROJBAKCGEYPUIHFLMVW"
r5="BKQSLPMDCANYHGIRZVJFTUXEOW"
rf="OKYXVGFSTQBWNMAUJZHIPELDCR"
to=list(a)
l=[]
l.append(list(r1))
l.append(list(r2))
l.append(list(r3))
l.append(list(r4))
l.append(list(r5))

for i in range(1,7):
  t1=input("entre a tomada (informe as 2 letras) - %d " % i)
  t1=t1.upper()
  i1=to.index(t1[0])
  i2=to.index(t1[1])
  to[i1]=t1[1]
  to[i2]=t1[0]

for m in range(3):
  ra=int(input("qual o número do rotor ? "))
  ini=input("inicializado com ? ")
  ini=ini.upper()
  i1 = a.index(ini)
  ratx=[]
  for i in range(i1,i1+26):
    j = i%26
    ratx.append(l[ra-1][j])
  if m == 0:
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
    rat1=ratx
  elif m == 1:
    rat2=ratx
  elif m==2:
    rat3=ratx
print (rat1,rat2,rat3)
# ciclo de criptografia
print("agora vai-se iniciar o ciclo de criptografia...")
palavra=input("qual a palavra a criptografar ? ")
xuxa=[]
for zica in range(len(palavra)):
  l1 = palavra[zica]
  l1=l1.upper()
  indice1 = a.index(l1)
  letra1=to[indice1]
  indice2=a.index(letra1)
  letra2=rat1[indice2]
  indice3=a.index(letra2)
  print('entra ',letra2)
  letra3=rat2[indice3]
  print ('sai ',letra3)
  indice4=a.index(letra3)
  letra4=rat3[indice4]
  indice5=a.index(letra4)
  letra5=rf[indice5]
  indice6=rat3.index(letra5)
  letra6=a[indice6]
  indice7=rat2.index(letra6)
  letra7=a[indice7]
  indice8=rat1.index(letra7)
  letra8=a[indice8]
  indice9=to.index(letra8)
  letra9=a[indice9]
  xuxa.append(letra9)
#  print(["sequencia desta letra ",l1,letra1,letra2,letra3,letra4,letra5,letra6,letra7,letra8,
  nrat=[]
  for i in range(1,27):
    if zica ==26: #era i==26:
      nrat2=[]
      for k in range(1,27):  #so faz o rotate de rat3 e de rat2 -- para nao complicar demais
        z=k%26
        nrat2.append(rat2[z])
      rat2=nrat2
    j=i%26
    nrat.append(rat3[j])
  rat3=nrat
print("criptografia da palavra ",''.join(xuxa))
aa=input('tecle algo')
```

**FITS** Um programa que manuseia uma imagem guardada no padrão FITS

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from astropy.utils.data import download_file
from astropy.io import fits
image_file = download_file('http://data.astropy.org/tutorials/FITS-images/HorseHead.fits', cac
hdu_list = fits.open(image_file)
print(hdu_list.info())
image_data = hdu_list[0].data
print(type(image_data))
print(image_data.shape)
hdu_list.close()
image_data = fits.getdata(image_file)
```

```
print(type(image_data))
print(image_data.shape)
plt.imshow(image_data, cmap='gray')
print('Min:', np.min(image_data))
print('Max:', np.max(image_data))
print('Mean:', np.mean(image_data))
print('Stdev:', np.std(image_data))
print(type(image_data.flat))
NBINS = 1000
histogram = plt.hist(image_data.flat, NBINS)
plt.show()
from matplotlib.colors import LogNorm
plt.imshow(image_data, cmap='gray', norm=LogNorm())
```

**Criptoaritmética** Imagine uma conta como

```
 SEND
+MORE
-----
MONEY
```

A brincadeira está em atribuir um dígito de 0..9 a cada letra de modo que a conta dê certo, sendo que letras iguais têm o mesmo valor e letras diferentes têm valor diferente. Uma possível resposta poderia ser

```
 9567
+1085
-----
10652
```

O programa que acha isto, (fazendo todas as combinações e trabalhando de maneira recursiva) é

```
def troca(depara,x): # depara="P1B6U9H2F7S5J8", x e a conta a fazer
  vet1=list(x[0])
  vet2=list(x[1])
  vetr=list(x[2])
  j=0
  while j<len(vet1):
    if vet1[j]!=' ':
      vet1[j]=depara[1+depara.index(vet1[j])]
    j=j+1
  j=0
  while j<len(vet2):
    if vet2[j]!=' ':
      vet2[j]=depara[1+depara.index(vet2[j])]
    j=j+1
  j=0
  while j<len(vetr):
    if vetr[j]!=' ':
      vetr[j]=depara[1+depara.index(vetr[j])]
    j=j+1
  return [vet1,vet2,vetr]

def menos(a,b): # a="1234567890" b="23489" devolve "15670" (o que falta)
  r=''
  for i in range(len(a)):
    if a[i] not in b:
      r=r+a[i]
  return r

def sol(ja,ain): # funcao recursiva que testa todas as possibilidades...
  global conta,qt
  qt=qt+1
#  if (qt%1000000==0):
  print("sendo chamado..." , ja,ain,str(qt))
  if len(ain)!=0:
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
    quais=menos('0123456789', ja)
    i=0 # era 1 deixei 0
    while i<len(quais):
      ja2=ja+ain[0]+quais[i]
      ain2=ain[1:len(ain)]
      sol(ja2,ain2)
      i=i+1
    return
  y=troca(ja,conta)
  t1=int(''.join(str(e) for e in y[0]))
  t2=int(''.join(str(e) for e in y[1]))
  tr=int(''.join(str(e) for e in y[2]))
  if t1+t2==tr:
    print("achamos uma resposta em ",y)
    aa=input("tecle algo")
  return

def criptarit(): #acerta conta (global) e o que já foi alocado (ou '') e manda ver
  global conta,qt
  qt=0
#  conta=['SEND','MORE','MONEY']  # agora deu...
#  sol('M1','OSENDRY')
#  conta=['BUHP','FUHS','PJSJU']
#  sol('P1','BUHFSJ')
# conta=['DRNRDHRMAD','NGUNGNNUHG','JDGHUMHUJH']
#  sol('','DRNHMAGUJ')
  conta=['SEND','MORE','MONEY'] #este aqui da...
  sol('M1S9OO','ENDRY')

criptarit()
```

**Turtle** Um pacote interessante de Python é o `turtle` que implementa a tartaruga de Wally Feurzig e Seymour Papert em 1966 através da linguagem Logo. É um ótimo ambiente para ensinar programação para crianças.

```
import turtle
t=turtle.Pen()
turtle.bgcolor("black")
colors = ["red", "yellow", "blue", "green"]
for x in range(300):
  t.pencolor(colors[x%4])
  t.forward(x)
  t.left(91)
```

### euler001

```
# euler 1
soma=0
for i in range(1,1000):
  if i%3==0 or i%5==0:
    soma=soma+i
print(soma)
```

### euler020

```
# euler 002
a=1
b=1
t=0
s=0
while (t<4000000):
  t=a+b
  b=a
  a=t
```

```
  print(a,b,t)
  if t%2==0:
    s=s+t
print(s)
```

### euler003

```
# euler003
import math
def primo(x):
  if x%2==0 and x!=2:
    return False
  lim=math.ceil(x**0.5)
  for j in range (3,lim,2):
    if x%j==0:
       return False
  return True

s=600851475143
maior=-9999999

# s**0.5 = 775147
for i in range(1,775147):
  if s%i==0:
    c1 = s//i
    c2 = s//c1
    if primo(c1):
      if c1>maior:
        maior=c1
    if primo(c2):
      if c2>maior:
        maior=c2
print(maior)

# implementação alternativa mais demorada
# for i in range (1,600 851 475 143):
#   if s%i==0 and primo(i) and i>maior:
#     maior=i
# print(maior)
# esta implementaçao demorou 20 minutos para i chegar em 3 633 531 810...
```

### euler003alt

```
import math
def primo(x):
  pri=True
  lim=math.ceil(x**0.5)
  for j in range (2,lim):
    if x%j==0:
      pri=False
  return pri

s=600851475143
maior=-9999999


# implementação alternativa mais demorada
for i in range (1,600851475143):
  if s%i==0 and primo(i) and i>maior:
    maior=i
print(maior)
```

### euler004

```
#euler 004
def pali(x):
  a=list(x)
  b=list(reversed(a))
  return a==b
x=999
mai=-9999
z=999
while x>100:
  if pali(str(x*z)):
    if mai<x*z:
      mai=x*z
      mx=x
      mz=z
  z=z-1
  if z<100:
    x=x-1
    z=999
print(mai,mx,mz)
```

### euler007

```
def prim2(n):
  import math
  if n==1:
    return False
  if n<4:
    return True
  if n%2==0:
    return False
  if n<9:
    return True
  if n%3==0:
    return False
  r=math.floor(math.sqrt(n))
  f=5
  while f<=r:
    if n%f==0:
      return False
    if (n%(f+2))==0:
      return False
    f=f+6
  return True

def enesprim(qual):
  count=1
  candidato=1
  while count<qual:
    candidato=candidato+2
    if prim2(candidato):
      count=count+1
  print(candidato)
```

### euler008

```
def euler008():
  s='73167176531330624919225119674426574742355349194934'
  s=s+'96983520312774506326239578318016984801869478851843'
  s=s+'85861560789112949495459501737958331952853208805511'
  s=s+'12540698747158523863050715693290963295227443043557'
  s=s+'66896648950445244523161731856403098711121722383113'
```

```
  s=s+'62229893423380308135336276614282806444486645238749'
  s=s+'30358907296290491560440772390713810515859307960866'
  s=s+'70172427121883998797908792274921901699720888093776'
  s=s+'65727333001053367881220235421809751254540594752243'
  s=s+'52584907711670556013604839586446706324415722155397'
  s=s+'53697817977846174064955149290862569321978468622482'
  s=s+'83972241375657056057490261407972968652414535100474'
  s=s+'82166370484403199890008895243450658541227588666881'
  s=s+'16427171479924442928230863465674813919123162824586'
  s=s+'17866458359124566529476545682848912883142607690042'
  s=s+'24219022671055626321111109370544217506941658960408'
  s=s+'07198403850962455444362981230987879927244284909188'
  s=s+'84580156166097919133875499200524063689912560717606'
  s=s+'05886116467109405077541002256983155200055935729725'
  s=s+'71636269561882670428252483600823257530420752963450'
  maior=-9999999
  i=0
  while i<987:
      prod=1
      j=0
      while j<13:
          prod=prod*int(s[i+j])
          j=j+1
      if prod>maior:
          maior=prod
          maii=i
          maij=j
      i=i+1
  print (maior,maii,maij)



  print(len(s))
```

### Euler 13

```
# euler13
def eul13():
  t=0
  with open("f:/p/up2017/ofidiario/arq_p13.txt") as f:
    for line in f:
      a = int(line)
      t=t+a
  print(t)


eul13()
```

### Euler 14

```
# eul14
def eul14():
  sem=1
  mai=0
  while sem < 1000000:
    temp=sem
    ctt=0
    while temp != 1:
      if temp%2==0:
        temp=temp//2
      else:
```

```
        temp=(3*temp)+1
      ctt=ctt+1
    if ctt > mai:
      mai = ctt
      qual = sem
    sem=sem+1
  return qual

print(eul14())
```

### Euler 15

```
# eul15
def eul15():
  import numpy
  a=numpy.zeros((21,21))
  for i in range(21):
    a[i][0]=1
    a[0][i]=1
  i=1
  while i < 21:
    j=1
    while j<21:
      a[i][j]=a[i-1][j]+a[i][j-1]
      j=j+1
    i=i+1
  return a[20][20]

print(eul15())
```

### Uma rede neural - 845

```
import numpy as np

def rn845(c1,c2,en,sa,tn,fa):
  # c1=neuronios da camada 1
  # c2=neuronios camada 2
  # en=entradas reais
  # sa=saidas esperadas
  # tn=tipos de neuronio (1=linear, 2=sigmoidal)
  # fa=fator de aprendizado

  # neuronio 1
  print("neuronios camada 1",a)
  print("neuronios camada 2",b)
  n1=(c1[0][0]*1)+(c1[0][1]*en[0])+(c1[0][2]*en[1])
  if tn[0]==2:
    n1=np.tanh(n1)
  print("neuronio 1 = ",n1)
  # neuronio 2
  n2=(c1[1][0]*1)+(c1[1][1]*en[0])+(c1[1][2]*en[1])
  if tn[1]==2:
    n2=np.tanh(n2)
  print(n2)
  # neuronio 3
  n3=(c1[2][0]*1)+(c1[2][1]*en[0])+(c1[2][2]*en[1])
  if tn[2]==2:
    n3=np.tanh(n3)
  print(n3)
  # neuronio 4
  n4=(c2[0][0]*1)+(c2[0][1]*n1)+(c2[0][2]*n2)+(c2[0][3]*n3)
  if tn[3]==2:
    n4=np.tanh(n4)
```

```
  print(n4)
  # neuronio 4
  n5=(c2[1][0]*1)+(c2[1][1]*n1)+(c2[1][2]*n2)+(c2[1][3]*n3)
  if tn[4]==2:
    n5=np.tanh(n5)
  print(n5)
  # note que n4=saida1 e n5=saida2
  # retropropagação no n4
  r4=sa[0]-n4
  if tn[3]==2:
    r4=r4*1-(r4**2)
  print("erro em n4 = ",r4)
  # retropropagacao de n5
  r5=sa[1]-n5
  if tn[4]==2:
    r5=r5*(1-n5**2)
  print("erro em n5 = ",r5)
  # retropropagação de n3  R3←(R4×c2[1;4])+(R5×c2[2;4])
  r3=(r4*c2[0][3])+(r5*c2[1][3])
  if tn[2]==2:
    r3=r3*(1-n3**2)
  print("erro em n3 = ",r3)
  # retropropagacao em n2  R2←(R4×c2[1;3])+(R5×c2[2;3])
  r2=(r4*c2[0][2])+(r5*c2[1][2])
  if tn[1]==2:
    r2=r2*(1-n2**2)
  print("erro em n2 = ",r2)
  # retropropagacao de n1   R1←(R4×c2[1;2])+(R5×c2[2;2])
  r1=(r4*c2[0][1])+(r5*c2[1][1])
  if tn[0]==2:
    r1=r1*(1-n1**2)
  print("erro em n1 = ",r1)
  # calculo dos novos pesos
  w11=c1[0][1]+(-2)*fa*n1*r1
  w12=c1[1][1]+(-2)*fa*n2*r2
  w13=c1[2][1]+(-2)*fa*n3*r3
  print ("peso w11 = ",w11)
  print ("peso w12 = ",w12)
  print ("peso w13 = ",w13)
#-------------- execucao da funcao --------------
a=np.array([[-0.1, 0.2, 0.2],[0.3,-0.1,0.3],[0.1, 0.1, 0.9]])
b=np.array([[0.2,0.1,-0.1,-0.1],[-0.1,0.5,0.2,1.1]])
c=[0.1,0.7]
d=[0.2,1]
e=[2,2,2,1,2]
f=0.1

rn845(a,b,c,d,e,f)
```

## Dump

```
#dump
def visivel(b):
  if b!='  ':
    a=int(b,16)
  else:
    return' '
  if a>32 and a<127:
    return chr(a)
  else:
    return '.'
```

 ©75-18, Pedro Kantek

```
def dump(nome):
  import math
  f=open(nome,"rb")
  x=f.read()
  y=x.hex().upper()
  tx=[]
  i=0
  tam1=len(y)
  tam2=32*(math.ceil(tam1/32))
  y=y+'                                '
  y=y+'                                '
  lin=0
  while i<tam2:
    tx.append(y[i:i+32])
    i=i+32
    lin=lin+1
  print("Dump do arquivo "+nome+"          -   dump v1.1, p.kantek, jul/17")
  print("")
  print("          0  1  2  3  4  5  6  7    8  9  A  B  C  D  E  F   ascii")
  print("         -- -- -- -- -- -- -- --   -- -- -- -- -- -- -- --   ----------")

  i=0
  while i<lin:
    l1=visivel(tx[i][0:2])
    l2=visivel(tx[i][2:4])
    l3=visivel(tx[i][4:6])
    l4=visivel(tx[i][6:8])
    l5=visivel(tx[i][8:10])
    l6=visivel(tx[i][10:12])
    l7=visivel(tx[i][12:14])
    l8=visivel(tx[i][14:16])
    lp=l1+l2+l3+l4+l5+l6+l7+l8
    l9=visivel(tx[i][16:18])
    la=visivel(tx[i][18:20])
    lb=visivel(tx[i][20:22])
    lc=visivel(tx[i][22:24])
    ld=visivel(tx[i][24:26])
    le=visivel(tx[i][26:28])
    lf=visivel(tx[i][28:30])
    lg=visivel(tx[i][30:32])
    ls=l9+la+lb+lc+ld+le+lf+lg
    pp=tx[i][0:2],tx[i][2:4],tx[i][4:6],tx[i][6:8],tx[i][8:10],tx[i][10:12],tx[i][12:14],tx[i]
    sp=tx[i][16:18],tx[i][18:20],tx[i][20:22],tx[i][22:24],tx[i][24:26],tx[i][26:28],tx[i][28:
    ii=hex(i*16)[2:].rjust(6,'0').upper()
    print(ii,' ',' '.join(pp),' ',' '.join(sp),'*',''.join(lp),''.join(ls))
    i=i+1



#dump("c:/apl2/f458exem.myd")
dump("c:/apl2/f458N001.myd")
```

### k-vizinhos

```
# f668
def dist(x,y):
  su=(x[1]-y[1])**2
  su=su+(x[2]-y[2])**2
  su=su+(x[3]-y[3])**2
  su=su+(x[4]-y[4])**2
  su=su+(x[5]-y[5])**2
  su=su+(x[6]-y[6])**2
  su=su**0.5
```

```
  return su
def f668(arq,qual):
  import numpy
  bd = numpy.zeros((1000,8))
  f=open(arq,'r')
  for i in range(1000):
    ll = f.readline()
    ll = ll+" 0.0" #acrescenta a distancia (por enquanto é 0.0)
    bd[i] = [float(x) for x in ll.split()]
  for i in range(1000):
    bd[i][7]=dist(bd[qual],bd[i])
  bd=bd[bd[:,7].argsort()]  # ordena a matriz pela coluna 7 - sort
  print(int(bd[1][0]),int(bd[2][0]),int(bd[3][0]))
       #imprime os filmes. o 0 é o próprio
f668("c:/p/n/668/EXEMPLO668.myd",499)  #499 é o filme 500
```

## QRCODE

```
import qrcode as qq
import matplotlib.pyplot as plt
qr = qq.QRCode(
    version=1,   # tamanho do QRCODE 10=menor, 40=maior
    error_correction=qq.constants.ERROR_CORRECT_L,  #correçao de erro
                                                #   l=7%, M=15% Q=25% e H=30%
    box_size=20,  # tamanho do pixel
    border=8, #tamanho da borda
)
qr.add_data('Oi nois aqui, traveis')  #conteúdo do QRCODE
qr.make(fit=True)

img = qr.make_image()
plt.imshow(img)
plt.show()
```

## uva100 - problema $3n+1$

```
import sys
cache = {1: 1}  # {number: cycle_length, ...}
def get_cycle_length(num):
    cycle_length = cache.get(num)
    if cycle_length is None:
        cycle_length = get_cycle_length(num // 2 if num % 2 == 0 else 3 * num + 1) + 1
        cache[num] = cycle_length
    return cycle_length
def main():
    for line in sys.stdin:
        min_num, max_num = map(int, line.split())
        a,b=min_num,max_num
        if max_num<min_num:
          max_num,min_num=min_num,max_num
        max_cycle_length = max(map(get_cycle_length, range(min_num, max_num+1)))
        print(a,b, max_cycle_length)
    sys.exit(0)
main()
```

Algumas dicas sobre este código:

```
import sys # importa a leitura em stdin
cache = {1: 1}  # define dicionário para conter o tamanho do ciclo
def get_cycle_length(num): #define a função que retorna o tamanho do ciclo
    cycle_length = cache.get(num) pega o valor do dicionario correspondente a num
```

```
    if cycle_length is None: # não existe ainda
        cycle_length = get_cycle_length(num // 2 if num % 2 == 0 else 3 * num + 1) + 1
        # recursivamente, pega o ciclo de n//2 ou n*3+1 conforme o caso e soma 1
        cache[num] = cycle_length  # inclui este novo valor recém calculado
    return cycle_length # devolve o valor recém calculado
def main():  #define a função main()
    for line in sys.stdin: # para cada linha na entrada
        min_num, max_num = map(int, line.split()) # converte 2 inteiros
        # lembrando, map aplica a função (operando1) à cada elemento da lista operando2
        a,b=min_num,max_num  # guarda a ordem original, para futura impressão
        if max_num<min_num: # se precisar, inverte
          max_num,min_num=min_num,max_num
        max_cycle_length = max(map(get_cycle_length, range(min_num, max_num+1)))
        # maximo é o max de map(tamanho, nos elementos de range min..max+1
        print(a,b, max_cycle_length) #imprime o resultado
    sys.exit(0) # importante no UVA
main()  # chama a função main
```

**Uma dica conceitual:** Um iterador está para um conainer como um índice está para uma lista, com o detalhe que o iterador também pode ser usado em uma lista. Um iterador é o que é um cursor em um banco de dados.

**Algumas dicas**

1. Definir um dicionário dic = chave: valor

   ```
   Exemplo: oi={1: 1}
   ```

2. Consultar um dicionário aa = dic[chave]
3. Criar uma nova chave dic[novachave] = novovalor
4. Substituir um valor velho dic[velhachave] = novovalor
5. Saber se uma chave existe:

   ```
   aa = dic.get(chave)  % note o parenteses
   if aa is None  % então chave não existe
   ```

6. Atribuição condicional:

   ```
   aa = aa//2 if aa%2==0 else 3*aa+1 equivale a
   if aa%2 == 0:
     aa = aa//2
   else:
     aa = 3*aa + 1
   ```

# Capítulo 14

# Bibliografia

## 14.1 Python

para saber mais sobre Python


**BEA13** BEAZLEY, David e JONES, Brian K. **Python Cookbook**. São Paulo, Novatec, 2013. 713p.

**RAM15** RAMALHO, Luciano. **Python Fluente**. São Paulo, Novatec, 2015. 797p.

**MEN10** MENEZES, Nilo Ney Coutinho. **Introdução à Programação com Python**. São Paulo, Novatec, 2010. 327p.

**MCK18** MCKINNEY, Wes. **Python para Análise de Dados**. São Paulo, Novatec, 2018. 615p.

**MUE16** MUELLER, John Paul, **Começando a programar em Python para leigos** Rio de Janeiro, Alta Books, 2016. 379p.

**KIN15** KINSLEY, Harrison e McGUGAN, Will. **Introdução ao desenvolvimento de Jogos em Python com PyGame**. São Paulo, Novatec, 2015.

**PYTxx** Comunidade Python Mundial. Site https://www.python.org.

**PYTxx** Comunidade Python Brasil. Site https://python.org.br.

**KAN18** KANTEK, Pedro Luis Garcia Navarro. **Python**. Curitiba, UFPR, 2018. Disponível em www.pkantek.com.br/ativ

**DOW16** DOWNEY, Allen B. **Pense em Python**. São Paulo, Novatec, 2016.

**FERsd** FERG, Steven. **Pensando em Tkinter**. São Paulo, se, sd. Disponível em http://thinkingtkinter.sourceforg


## 14.2 Algoritmos e programação

Livros e materiais sobre programação.


**DEL12** DELGADO, Armando Luiz. **Linguagem C++**. Curitiba, UFPR, 2012.

**DEW89** DEWDNEY, A. K. **The (new) Turing Omnibus**. New York, W. H. Freeman, 1989. 460p.

**COR14** CORMEN, Thomas H. **Algoritmos**. Rio de Janeiro, Elsevier, 2014. 188p.

**BHA17** BHARGAVA, Aditya. **Entendendo Algoritmos**. São Paulo, Novatec, 2017. 259p.

**SKI97** SKIENA, Steven S. - **The Algorithm Design Manual**. New York, Springer. 1997. 486p.

**SKI03** SKIENA, Steven S e REVILLA, Miguel A. **Programming Challenges**. New York, Springer. 2003. 361p.

**SKI12** SKIENA, Steven S e REVILLA, Miguel A. **Desafios de Programación**. New York, Springer. 2012. 343p. Tradução do inglês ao espanhol.

**FOR05** FORBELLONE, A. L. V. e EBERSPÄCHER, H. F. - **Lógica de Programação**. São Paulo. 2005. 214p.

**FOR72** FORSYTHE, Alexandra I. et all. **Ciência de Computadores** - 1. curso. Volume 1. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico. 1972. 234p.

**FOR72b** FORSYTHE, Alexandra I. et all. **Ciência de Computadores** - 1. curso. Volume 2. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico. 1972. 560p.

**KNU71** KNUTH, Donald E. **The Art of Computer Programming**. Volumes 1 e 2. Reading, Massachussets, Addison Wesley Publishing Company, 1971, 624p.

**WIR89** WIRTH, Niklaus. **Algoritmos e estruturas de dados**. Rio de Janeiro, Prentice-Hall do Brasil, 1989, 245p.

**KAO08** KAO, Ming-Yang. (ed.) **Encyclopedia of Algorithms**. New York, Springer, 2008. 1200p.

**RUS03** RUSSEL, Stuart e NORVIG, Peter. Inteligencia Artificial. Editora Campus, 2003.

## 14.3 Métodos Numéricos

**SAN07** SANCHES, Ionildo José e FURLAN, Diogenes. **Métodos Numéricos**. Curitiba, UFPR, 2007.

**FRA07** FRANCO, Neide Bertoldi. **Cálculo Numérico**. São Paulo, Pearson, 2007.

**JUS18** JUSTO, Dagoberto Adriano et alli. **Cálculo Numérico, versão Python**. Porto Alegre, UFRGS, 2018.

**BAR87** BARROSO, Leônidas Conceição et alli. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. São Paulo, Harbra, 1987.

**RUG88** RUGIERO, Márcia e LOPES, Vera Lúcia. **Cálculo Numérico - aspectos teóricos e computacionais**. São Paulo, Pearson, 1988.

**PAC78** PACITTI, Tércio e ATKINSON, Cyril. **Programação e Métodos Computacionais**. vol 1 e 2. Rio de Janeiro, LTC, 1979.

**CAM14** CAMPOS Filho, Frederico Ferreira. **Algoritmos Numéricos**. Rio de Janeiro, LTC, 2014.

# Índice Remissivo


1 milhão de dólares, 98
7 problemas, 15

A*, 153
abacaxí, 89
adição, 33
administrador, 27
Al Kowarism, 15
aleatória, 62
algoritmo, 16
algoritmo de Luhn, 108
alo mundo, 25
and, 37
anônima, 63
APL, 172
apl, 29
append, 49
arange, 83
argumento, 71
aritmética complexa, 33
arquivo, 77, 133
array, 83
aspas, 29
assembler, 10
associativo, 58
ASTROPY, 81
atribuição, 29
avaliadores, 67

BACEN, 109
backtracking, 143
banana, 89
barbante, 89
baskhara, 17
Beidou, 105
bergamotas, 43
Berkeley, 21
bibliografia, 193
Big-Mac, 103
bispo, 122
bissexto, 114
Bjarne Stroustrup, 23
blocos aninhados, 44
blocos de comando, 39
bolas, 140
boleto bancário, 109
bolha, 157
bolha*, 157
bolo, 43
booleanos, 61
break, 43
brincando, 61
broadcasting, 84
buffer, 78
busca binária, 94
busca sequencial, 94
Bélgica, 107

C++, 29
café, 43
caixa dágua, 43
caixeiro viajante, 148
calculadora, 26
calendário, 111
Caltech, 21
capitalize, 67
CAR, 31
Carnegie Mellon, 21
cartas, 127
cavalo, 122
CDR, 31
ceil, 86
center, 67
chave, 58
chave de fenda, 16
ciclo de vida, 19
cin, 22
cinco, 140
circuíto elétrico, 164
clear, 60
close, 77
CMATH, 82
COBOL, 10
colisão, 93
COLLECTIONS, 81
collections, 53
COLOSSUS, 11
combinatória, 142
concatenação, 86
condicional, 39
conjunto, 58, 135
container, 126
continuação, 65
continue, 44
Copa do Mundo, 178
Cornell, 21
correio, 89
count, 52, 67
cout, 22
cp1252, 69
Criptoaritmética, 183
criptografia, 143
Crivo de Eratóstenes, 98
CSV, 63, 82
cubo inscrito, 130
Curitiba, 105
Curitiba-Nova York, 22

cursor, 95
cápsulas mágicas, 179
círculo, 105

DATETIME, 82
deep blue, 120
default, 65, 72, 73
Dennis Ritchie, 23
descargas de código, 39
desvio padrão, 87
determinante, 85
diagonal, 117
dicionário, 58
dict, 58
diferente, 37
DistBelief, 22
distribuição binomial, 87
distribuição normal, 87
distância, 106
divisibilidade, 98
divisão inteira, 33
divisão real, 33
DJANGO, 81
documentação, 75
dois pontos, 39
Don't panic, 23
dump, 189
Dígito Verificador, 107

EAN13, 107
eficiência, 22
egípcio, 176
eixo, 106
else, 39
embaralhando, 62
engenharia elétrica, 27
ENIAC, 12
eniac, 11
ENIGMA, 11
Enigma, 181
enigma, 11
entscheidungsproblem, 11
equações lineares, 85
equinócio, 112
espaço de chaves, 93
espaço de endereços, 93
estruturas ligadas, 95
Euclides, 92
Euler, 97
euler001, 184
euler002, 184
euler003, 185
euler004, 186
euler007, 186
euler008, 186
euler013, 187
euler014, 187
euler015, 188
exceção, 79
excluir, 31
execução repetida, 43
exemplos de for, 47
exponenciação, 116
expressão aritmética, 33

False, 36
fatiamento, 50, 57
fibonacci, 71, 134
figurinhas, 178
fila, 53
filho direito, 95
filho esquerdo, 95
filter(), 54
filtrando, 63
filtrar, 55
find, 67
FITS, 182
float, 32, 35
floor, 86
flutuante, 32
fogueira, 113
for, 45
format, 33
FORTRAN, 10
força bruta, 101
fractal, 177
freeware, 21
funções, 71
funções universais, 84
furos, 173

Galileu, 105
Gasparov, 120
Gauss, 97, 177
Gauss-Jordan, 124
gedit, 27
get, 60
Giordano Bruno, 113
global, 71
Glonass, 105
GPS, 104, 137
graciosamente, 66
Greenwich, 105
Gregório, 112
Guido van Rossum, 23
GZIP, 82
Gödel, 14

hanoi, 148
hardware, 10
Hart, 153
hash, 93
Havai, 133
heapsort, 158
hierárquica, 95
Hilbert, 15
hipotenusa, 106
histograma, 138
Hounsfield, 166

if, 39
igual, 37
imperfeitos, 103
in, 72
in place, 52
in-place, 84

incremento, 50
indentado, 39
indentação, 39
infinitos, 96
input, 35
inserção, 158
int, 32, 35
Inteligência artificial, 31
interativa, 26
intercalada, 63
invariante, 66
invocação, 73
Ipython, 27
isatty, 79
ISBN, 108
ITERTOOLS, 82

j, 33
James Martin, 157
janela deslizante, 126
java, 29
Je pense, donc je suis, 104
JMBG, 108
Julio Cezar, 111
juntando, 63

k-vizinhos, 190
keys(), 58
kinder ovo, 129
Kirchhoff, 165
knapsack, 143

lambda, 55
Latitude, 105
lava, 134
laço infinito, 45
lei das tensões, 164
Light, 109
lisp, 31
list, 49
list comprehension, 55
listcomp, 55, 56
locomotiva, 126
logaritmo, 94
Longitude, 105
loop, 43
lua, 111

mainstream, 21
maior, 37
maior ou igual, 37
mais, 33
mais do que perfeitos, 104
maiúsculas, 33
Mandelbroot, 177
manipulação de bits, 69
map, 55
map(), 54
mapeamento, 93
margens, 39
MATPLOTLIB, 81
matriz, 83
matriz inversa, 85, 123
matriz quadrada, 136
maçã, 89
MDC, 91
menor, 37
menor ou igual, 37
menos, 33
miasma, 175
micróbio, 174
mina, 165
minúsculas, 33
MIT, 21
MMC, 91
mochila, 143
mod10, 109
mod11, 108
modificar um tipo, 32
moeda, 175
mosca, 104
multiplataforma, 21
multiplicação, 33
multiplicação matricial, 85
muro, 141
Máquina Universal de Turing, 13
média, 84
mínimos quadrados, 146
módulo, 33
Múltiplo assinalamento, 30

NameError, 31
ndarray, 83
neumann, 17
Nicéia, 112
Nilsson, 153
nomes, 33
Noruega, 108
not, 37
NUMPY, 81
Numpy, 27
numpy, 31, 83
números amigos, 104

objeto, 72
Olimpíada Brasileira de Informática, 140
ONU, 112
open, 77
OpenCV, 81
or, 37
ordenação, 87, 157
ordens, 11

painel de controle, 25
palavra reservada, 32
palito, 90
PANDAS, 82
paquera, 104
par, 62
paralelepípedo, 89
parser, 75
partition, 68
parênteses, 34
pascal, 29
passeio do cavalo, 148
Peano, 15

pendrive, 27
peopleware, 10
perfeitos, 103
PHP, 29
pilha, 53
Pitágoras, 105
plano complexo, 177
poker, 127
poliglota, 11
ponto mestre, 107
primalidade, 96
primo bom, 99
print(), 34
prioridade, 61
problema fundamental, 92
procedimento, 71
produto vetorial, 85
programador, 11
programação funcional, 31, 54
projecteuler, 101
prolog, 31
prompt, 26
pseudo-aleatório, 175
PYEASYGA, 81
PYGAME, 81
PYODBC, 81
PYPI, 22
PYSIM, 82
Python, 21
python2, 34
python3, 34
pythonanywhere, 27
Páscoa, 112

QRCODE, 191
quadrados, 55
quadrante, 106
quebrar, 130
quickselect, 151
quicksort, 158

RANDOM, 81, 82
random, 62
readline, 77
readlines, 78
reator, 164
recorrência, 142
recursividade, 31, 137
rede neural, 188
reduce(), 54
René Descartes, 104
repetição, 135
repetições, 43
replace, 68
resmungar, 61
resto, 33
return, 72
retângulo, 105
reverse, 53
Revolução francesa, 112
Richard Karp, 143
Riemann, 97
roldana, 180

sabath, 111
Salada de frutas, 89
Sarrus, 136
saída, 34
SCIKIT-LEARN, 81
SciPi, 27
script, 22
seleção, 158
sentinela, 93
serviço postal, 89
set, 58
shape, 83
shell, 158
shuffle, 62
similar, 128
simétrico, 133
sintax error, 55
Sistemas Lineares, 123
SOCKET, 82
software, 10
sol, 111
solve, 85
somando, 63
sort, 53
sorted, 60
sorvete, 146
split, 68
SSL, 82
Stanford, 21
str, 32, 35
strassen, 150
strings, 65
sublinha, 33
subtração, 33
supermercado, 132
swap, 30
system, 25
símbolo, 71

tabela de símbolos, 71
tautologia, 44
tela azul da morte, 27
tell, 78
Tensor Flow, 22
THEANO, 81
tijolos, 141
tiobe, 21
Tipagem, 23
tipo, 31
tipo de ordem, 17
TKINTER, 81
tomografia, 9
tomografia computadorizada axial, 166
torre, 122
transportadora, 163
transposta, 85
treliça, 116
triangulares, 101
triângulo, 105
troco, 175
True, 36
truncate, 79
tupla, 57

Turing, 9, 11, 17
TURTLE, 81
Turtle, 184
TypeError, 30

Uber, 104
UCLA, 21
ufuncs, 84
Un. Columbia, 21
Un. Michigan, 21
Unicode, 33, 68
unicode, 33
UNICODEDATA, 81
UTF-8, 33
utf8, 33
uva100, 191

vagão, 125
value error, 52
ValueError, 30
variável, 29
variável lógica, 36
variância, 84
vazio, 57
vencimento, 110
versão, 25
vezes, 33
vizinho, 134
Von Neumann, 11, 17

web, 27
WEBBROWSER, 82
while, 43
windowing, 166
winpython, 27
Wirth, 16
with, 79
write, 77

xadrez, 120

zeta, 97
zip, 60

árvore, 117
árvore binária de busca, 95
átomo, 153
ímpares, 43

 ©75-18, Pedro Kantek