Teorema de Goedel

Figure 1: Kurt Göedel

Gödel nasceu em 18 de abril de 1906 em Brno atual Rep. Tcheca. Durante toda a sua vida escolar somente uma única vez Gödel deixou de ganhar a nota máxima (e logo em matemática). Foi batizado de criança como *der Herr Warum* (O senhor Por que ?). Apresentou sua tese de doutorado em Viena em 1929. Morreu em 14/01/78 de fome.

Durante seu processo de naturalização americana, o juiz perguntou a opinião sobre a constituição americana: levou um sabão sobre suas incongruências, tinha medo das emanações venenosas de seu refrigerador, morreu em 14/01/78 de fome

Em fins do século XIX, no Congresso de Matemática de Paris, em 1900, Hilbert, renomado professor em Göttingen apresentou 23 problemas, que segundo ele estariam ocupando os matemáticos do século XX. Seu segundo problema perguntava se é possível provar que os axiomas da aritmética são consistentes, isto é, dado um número finito de passos lógicos corretos, nunca se chegará a uma contradição. Na esteira desse problema, Bertran Russell, um filósofo matemático (ou será matemático filósofo ?) em 1910, começou uma série de livros (Principia Mathematica), na qual, baseado nos axiomas de Peano, desenvolvia todo um programa de formalização da matemática. A tentação era saborosa: provar que lógica e matemática eram a mesma coisa. Mas, o segundo problema de Hilbert continuava em aberto. Estudos posteriores de um jovem matemático austríaco, Kurt Gödel, emigrado para os EUA, que se consubstanciaram no teorema que leva o seu nome, deram o tiro de misericórdia na pretensão. Gödel provou que num sistema lógico formal existem assertivas verdadeiras que não podem ser provadas. Foi mais um sopetão na pretensão homocêntrica do Universo (assim como fizeram Copérnico, Darwin e Freud, só para ficar nos mais evidentes). Antes de passar ao Teorema de Gödel, diga-se apenas que dos 23 problemas, aproximadamente a metade ainda não tem solução (terá algum dia ?), e pior, ou melhor, a matemática se desenvolveu em centenas de direções nem sonhadas por Hilbert. Ainda bem que o trabalho final dele, terminava com a citação: *Enquanto uma ciência oferece abundância de problemas, ela está viva.*

Aliás, buscando inspiração no Congresso de 1900, na virada do século XX para o XXI, um americano rico, deixou 1 milhão de dólares para quem resolver por primeiro 7 problemas ainda pendentes na matemática: O problema P versus NP, além da hipótese de Riemann, a teoria de Yang-Mills (hipótese de lacuna de massa), as equações de Navier-Strokes, a conjectura de Poincaré, a conjectura de Birch, Swinnerton e Dyer e a conjectura Hodge) [1]

Demonstração do Teorema de Incompletude

Seu teorema se baseia em um processo de 3 etapas:

1. Estabelecer as regras pelas quais axiomas (e teoremas) podem gerar novos teoremas
2. Estabelecer os axiomas da aritmética em linguagem de lógica de predicados
3. Estabelecer uma forma de numeração para os teoremas assim gerados.

Eis os axiomas de Peano para os números naturais. Note-se que o símbolo s denota sucessor, um conceito primitivo. O sucessor de 0 é 1, de 1 é 2, ... de n é n+1:

$\forall x \sim (0 = sx)$	Não existe x tal que 0 seja seu sucessor
$\forall x, y(sx = sy) \Rightarrow (x = y)$	Se 2 números tem o mesmo sucessor, são iguais
$\forall x, x + 0 = x$	0 é o elemento neutro na adição
$\forall xy, x + sy = s(x + y)$	x somado com o sucessor de y é igual ao sucessor de x+y
$\forall x, yx \times sy = xy + x$	x=2, y=5 leva a 2 × 6 = 2 × 5 + 2 = 12
$\forall x, x \times 0 = 0$	0 é o elemento absorvente na multiplicação
$\forall x, x = x$	identidade
$\forall xyz, (x = y) \Rightarrow ((x = z) \Rightarrow (y = z))$	propriedade transitiva
$\forall xy, (x = y) \Rightarrow (A(x, x) \Rightarrow A(x, y))$	A é qualquer fórmula com 2 variáveis livres
$(P(0) \wedge \forall x P(x) \Rightarrow P(sx))) \Rightarrow \forall x P(x)$	Regra fundamental da indução matemática

Com estas informações, Gödel, passou à etapa 3 do teorema, usando a tabela a seguir:

Símbolo	Código	Símbolo	Código	Símbolo	Código
0	1	(	6	$\sim$	11
s	2	)	7	$\wedge$	12
+	3	,	8	$\exists$	13
$\times$	4	x	9	$\forall$	14
=	5	1	10	$\Rightarrow$	15

Note-se que só existe a variável x. Logo quando só aparece x, ele será identificado como x_1. Quando aparecerem x e y, eles serão x_1 e x_{11}, e assim por diante.

Agora para cada cláusula, Gödel bolou um número, que mais tarde foi chamado "Número de Gödel", e que é construído da seguinte maneira. Tomam-se os primos a partir do 2. São eles: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29... Cada axioma terá seu número de Gödel calculado por um sistema de numeração onde as bases são os primos e os

[1] vide em www.claymath.org as regras do prêmio e a descrição formal deste e de mais 6 problemas:

expoentes são o numero da tabela acima. Para clarear, vejamos o número de Gödel do axioma 4 de Peano:

$\forall x, y; x + sy = s(x + y)$ [Escrito em linguagem matemática]

$x_1 + sx_{11} = s(x_1 + x_{11})$ [Escrito na forma adequada para o teorema de Gödel],

e o número é:

$2^9.3^{10}.5^3.7^2.11^9.13^{10}.17^{10}.19^5.23^2.29^6.31^9.37^{10}.41^3.43^9.47^{10}.53^{10}.59^7$

Note-se que o numero é enorme, mas isso é de propósito. É para que, dado um número, SE ELE FOR UM NÚMERO DE GÖDEL, possa-se recuperar qual o axioma ou teorema que lhe deu origem. Basta fatorá-lo em seus componentes primos, e verificar qual o expoente de cada um dos primos. Ou seja, a relação axioma - número de Gödel é bi-unívoca.

Estamos chegando perto da prova:

Seja o predicado PROVA(x,y,z), lido como x é o número de Gödel da prova da fórmula Y (que tem número de Gödel y), o qual teve o inteiro z inserido dentro dela. Note-se que PROVA(x,y,z) é um jeito fácil de escrever uma imensa e longa expressão onde aparecem x1, x11 e x111,

Essa expressão inclui muitos procedimentos, entre eles:

- dado um inteiro, fatore-o em seus fatores primos
- ache a expressão que lhe deu origem
- verifique se a expressão verifique se ela é uma fórmula
- verifique se ela esta provada

Claramente são procedimentos irrealizáveis na prática, mas em princípio, computáveis.

Vamos considerar um caso especial do predicado acima: Suponha que a fórmula Y é alimentada com seu próprio número de Gödel, e vamos tentar negar a existência de tal prova. Escreve-se $\sim \exists\, xPROVA(x, y, y)$

Em palavras: x é o número de Gödel da prova obtida na fórmula Y pelo número y (Número de Gödel de Y). Vamos chamar ao número de Gödel da PROVA(x,y,y) de g.

Finalmente: o TEOREMA DE GÖDEL

$\sim \exists\, xPROVA(x, g, g)$ é verdadeiro, mas não é provável (no sentido de poder ser provado) no sistema aritmético formal.

A demonstração ocupa poucas linhas:

Suponha que $\sim \exists\, xPROVA(x, g, g)$ é provável (no mesmo sentido) e seja p o número de Gödel dessa prova P. Então, nós temos que PROVA(p,g,g) é verdadeiro, desde que P é a prova de G, na qual foram substituídas as variáveis livres. MAS, a veracidade de PROVA(p,g,g) contradiz $\sim \exists\, xPROVA(x, g, g)$, e daqui temos que não existe essa prova.

Então, se tudo foi construído corretamente, a afirmação $\sim \exists\, xPROVA(x, g, g)$ é verdadeira e portanto não existe a $PROVA(x, g, g)$ dentro do sistema.

Em resumo: Dentro de um sistema de lógica formal existem teoremas que são indecidíveis.

O teorema de Goedel decide as duas primeiras questões de Hilbert: a matemática não é completa e e nem pode ser provada consistente, mas não resolve a terceira questão. Esta foi respondida negativamente de forma independente por dois cientistas: o primeiro denominado Alonso Churchs em abril de 1936 na universidade de Princeton ano nos Estados Unidos. Outro foi Alan Mathison Turing, em agosto de 1936 no Kings College em Londres. Um terceiro matemático, o polonês naturalizado americano Emil Post, professor do City College de New York submeteu em outubro de 1936 um artigo ao Jornal de Lógica Simbólica no qual expõe uma idéia similar à de Turing, embora menos ambiciosa.

Do trabalho de Church derivou-se a notação λ para definir funções, que está por trás da construção do interpretador LISP. O trabalho do Post deu origem ao PROLOG. O trabalho de Turing é simplesmente o projeto de um moderno computador digital.

Uma maneira mais fácil de entender esta coisa é imaginar que Curitiba é uma pequena aldeia que tem apenas um barbeiro. Ele é definido como o profissional que faz a barba dos homens da aldeia que não se barbeiam sozinhos.

Aqui o problema (que foi endereçado por Gödel): O barbeiro faz a sua própria barba?

O barbeiro da aldeia, que barbeia todos os homens que não se barbeiam sòzinhos, se encontra numa situação absurda: sua definição não permite que êle se barbeie sòzinho e, ao mesmo tempo, proíbe-o de não se barbear.

Ilustração de Matemática Moderna, de Walter Fuchs.