

**Grafos** Definição formal: um grafo  $G$  é uma tripla  $G = (V, A, F)$ , onde  $V$  = conjunto de vértices do grafo;  $A$  = conjunto de arestas do grafo e  $F$  = função que relaciona arestas e vértices ( $F : A \implies V \times V$ ). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo  
 $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \rightarrow A \times B, 2 \rightarrow B \times C, 3 \rightarrow B \times D, 4 \rightarrow B \times A, 5 \rightarrow C \times D, 6 \rightarrow D \times A\})$   $G_1$  seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:  
 $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$   
ou  $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em [www.graphviz.org](http://www.graphviz.org).

**Alguns conceitos** A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo  $G$ , ao cardinal  $|V|$ , que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice  $v \in V$ , o número de vértices adjacentes a  $V$ .

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices  $a$  e  $b$  são ditos adjacentes quando a linha  $(a, b)$  existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes  $v_1 \dots v_k$  é dita caminho de  $v_1$  até  $v_k$ . Esse caminho é formado por  $k - 1$  arestas. O valor  $k - 1$  é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

## Grafos usando listas encadeadas de arestas

**Observação: contagens começam em 1 e não em zero.**

Existem basicamente duas maneiras de representar grafos. A primeira usa um conjunto de listas encadeadas. Serão tantas listas quantos vértices houverem no grafo. Acompanhe no quadro negro um exemplo desta representação. A outra maneira é através de uma matriz de adjacência. Trata-se de uma matriz  $n \times n$ , onde o elemento  $i, j$  dessa matriz representa a aresta que conecta os vértices  $i$  e  $j$ . Tipicamente usa-se o primeiro caso para grafos esparsos, nos quais a quantidade de zeros seria muito grande na matriz de adjacência.

De qualquer maneira são representações que se equivalem, ou seja, sempre é possível passar de uma a outra.

Este exercício treinará a notação de listas encadeadas para representar grafos.

Definição: DIÂMETRO de um grafo é o maior caminho existente entre quaisquer par de vértices desse grafo.

Exemplo: Seja o grafo NÃO ORIENTADO, contendo 6 vértices e 7 arestas representado pelas tabelas a seguir, onde VÉRTICE é o número do vértice e PRIMEIRA ARESTA é o endereço da primeira aresta na tabela que representa as listas de arestas

| VÉRTICE | 1.ARESTA |
|---------|----------|
| 1       | 8        |
| 2       | 16       |
| 3       | 13       |
| 4       | 2        |
| 5       | 9        |
| 6       | 15       |

| Lista de Arestas |      |       |      |
|------------------|------|-------|------|
|                  | VERT | VALOR | PROX |
| 1                | 2    | 10    | -1   |
| 2                | 1    | 13    | 5    |
| 3                | 6    | 20    | -1   |
| 4                | 3    | 18    | 14   |
| 5                | 5    | 20    | -1   |
| 6                | 5    | 18    | -1   |
| 7                | 6    | 10    | -1   |
| 8                | 4    | 13    | 18   |
| 9                | 1    | 2     | 4    |
| 10               | 13   | 19    | 10   |
| 11               | 19   | 8     | 6    |
| 12               | 15   | 8     | 1    |
| 13               | 2    | 18    | 6    |
| 14               | 4    | 20    | -1   |
| 15               | 1    | 20    | 1    |
| 16               | 3    | 18    | 7    |
| 17               | 6    | 12    | 20   |
| 18               | 5    | 2     | 3    |
| 19               | 3    | 14    | 12   |
| 20               | 6    | 17    | 16   |

Veja-se aqui como reconstituir o grafo deste exemplo:

O vértice 1 está ligado ao 4 por uma aresta valendo 13. O vértice 1 também está ligado ao 5 por uma aresta valendo 2 E também ao vértice 6 por uma aresta valendo 20.

Eis aqui, a título de esclarecimento, a matriz de adjacência do grafo

|   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 0  | 0  | 0  | 13 | 2  | 20 |
| 2 | 0  | 0  | 18 | 0  | 0  | 10 |
| 3 | 0  | 18 | 0  | 0  | 18 | 0  |
| 4 | 13 | 0  | 0  | 0  | 20 | 0  |
| 5 | 2  | 0  | 18 | 20 | 0  | 0  |
| 6 | 20 | 10 | 0  | 0  | 0  | 0  |

Note que o grafo é não-orientado

Uma vez desenhado o grafo, deve-se obter a matriz de caminhos mínimos que neste caso é:

|   | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 4  | 30 | 20 | 13 | 2  | 20 |
| 2 | 30 | 20 | 18 | 43 | 32 | 10 |
| 3 | 20 | 18 | 36 | 33 | 18 | 28 |
| 4 | 13 | 43 | 33 | 26 | 15 | 33 |
| 5 | 2  | 32 | 18 | 15 | 4  | 22 |
| 6 | 20 | 10 | 28 | 33 | 22 | 20 |

Agora, as duas perguntas do exercício:

1. Qual o diâmetro do grafo ? (É o maior valor na matriz de CM): Resposta: 43, que vem a ser a ligação de 2 com 4 e 4 com 2

2. Quantas arestas "diminuíram de custo"? (Deve-se comparar a matriz CM com a matriz de adjacência originalmente construída) Resposta: 1.

note que a ligação 4 com 5 (e 5 com 4) tinha um custo de 20, mas na matriz de CM apareceu um caminho menor, valendo 15. É a única aresta onde isso ocorreu.

### Para você fazer

Seja o seguinte grafo

| VERTICES |      | LISTA DE ARESTAS |      |       |      |
|----------|------|------------------|------|-------|------|
| VERT     | PRIM | NUM              | VERT | VALOR | PROX |
| 1-       | 18   | 1-               | 1    | 1     | 14   |
| 2-       | 1    | 2-               | 19   | 7     | 1    |
| 3-       | 10   | 3-               | 3    | 11    | 4    |
| 4-       | 16   | 4-               | 4    | 10    | 11   |
| 5-       | 3    | 5-               | 5    | 10    | -1   |
| 6-       | 19   | 6-               | 2    | 17    | 11   |
|          |      | 7-               | 4    | 9     | -1   |
|          |      | 8-               | 5    | 11    | -1   |
|          |      | 9-               | 8    | 6     | 4    |
|          |      | 10-              | 1    | 8     | 8    |
|          |      | 11-              | 6    | 14    | -1   |
|          |      | 12-              | 5    | 14    | -1   |
|          |      | 13-              | 4    | 3     | 7    |
|          |      | 14-              | 6    | 4     | -1   |
|          |      | 15-              | 16   | 7     | 10   |
|          |      | 16-              | 1    | 9     | 5    |
|          |      | 17-              | 9    | 3     | 14   |
|          |      | 18-              | 2    | 1     | 20   |
|          |      | 19-              | 2    | 4     | 12   |
|          |      | 20-              | 3    | 8     | 7    |

Perguntas: 1. Qual o diâmetro deste grafo ?

R:\_\_\_\_\_.

2. Quantas arestas "diminuíram de custo"?

R:\_\_\_\_\_.

Note que APENAS as 14 (ou 7) arestas originais devem ser comparadas com os valores obtidos na matriz de caminhos mínimos.

