Teorema de Bayes

Thomas Bayes foi um pastor protestante provavelmente nascido em 1701. Integrante da igreja inconformista não pode entrar em Oxford ou Cambridge precisando ir estudar na universidade de Edimburgo. Escreveu *An Essay toward Solving a Problem in the Doctrine of Chances* (Tentativa de elucidar um problema na doutrina do acaso). O livro só foi publicado após a sua morte por seu amigo Richard Price. Na introdução, Price sugere um primeiro homem (Adão) - talvez recém criado ou recém saído da caverna de Platão. Ele vê o sol nascer pela primeira vez e fica maravilhado. Nesse dia ele não sabe se é um fenômeno típico ou ao contrário um fenômeno insólito. Mas, a cada dia que sobrevive e vê o sol nascer aumenta sua confiança de que se trata de uma característica periódica da natureza. Aos poucos, baseado nessa dedução estatística a probabilidade que ele aplica à previsão de que o sol vai nascer no dia seguinte se aproxima de 100%, embora nunca chegue a esse ponto. Já a expressão matemática mais comum do que hoje é reconhecido como o Teorema de Bayes foi desenvolvida pelo ateu, matemático e astrônomo francês Pierre-Simon Laplace. O teorema associa quatro variáveis sendo 3 conhecidas ou supostas e a quarta desconhecida. Ele se concentra na probabilidade condicionada. Ou seja, na probabilidade de uma hipótese ser verdadeira SE tiver acontecido determinado acontecimento.

Para entender o funcionamento do Teorema de Bayes, vamos dar nomes aos bois:

A deve ser o evento para o qual se quer achar a probabilidade. É a pergunta a responder

B é o evento secundário, que efetivamente ocorreu.

$P(A)$ É a probabilidade PRÉVIA de A na população em geral. Vamos chamar esta variável de x e ela é um valor entre 0 e 1.

$P(B|A)$ É a probabilidade de B ocorrer quando A ocorreu. Chamando a esta variável de y.

$P(B|\sim A)$ A probabilidade de B ocorrer quando A NÃO ocorre. Variável z.

$P(A|B)$ Finalmente esta é a nossa incógnita. Queremos saber qual a probabilidade de A ocorrer, DADO que B ocorreu. Ela é dada pela fórmula

$$P(A|B) = \frac{x.y}{(x.y) + z.(1-x)}$$

Demonstração

Da teoria, sabe-se que
$P(A \wedge B) = P(A|B).P(B)$ e também
$P(A \wedge B) = P(B|A).P(A)$. Igualando-se os 2 termos e dividindo tudo por $P(A)$ fica:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B).P(B)}{P(A)}$$

. Daqui, o que nos interessa é

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Mas, agora pode-se escrever uma segunda equação (para $\sim A$) e fica:

$$P(\sim A|B) = \frac{P(B|\sim A).P(\sim A)}{P(B)}$$

Somando as duas equações acima e lembrando que $P(A|B) + P(\sim A|B) = 1$ pode-se escrever $P(B) = P(B|A).P(A) + P(B|\sim A).P(\sim A)$ e substituindo isso na equação $P(A|B)$ fica

$$P(A|B) =$$

$$\frac{P(B|A).P(A)}{(P(B|A).P(A)) + P(B|\sim A).(1-P(A))}$$

que é a equação operacional acima.

Exemplos

No primeiro exemplo suponha que você é uma mulher que mora com o seu namorado. Ao voltar de uma longa viagem de trabalho, você vai arrumar sua gaveta de roupas íntimas e leva um susto: está lá uma roupa íntima (por hipótese uma calcinha de rendas) que não é sua. Você nunca compraria tal peça. Imediatamente você é assaltada por uma dúvida. Será que o seu parceiro está tendo um caso com outra mulher? Antes de chutar o pau da barraca, como você conhece tudo sobre probabilidade condicional, e tudo sobre o Reverendo Bayes, vamos esfriar a cabeça e fazer algumas contas. Dando nomes aos bois:
A é o evento estar sendo traída pelo namorado.
B é o evento aparecer uma calcinha desconhecida na sua gaveta.
Agora vem a parte prévia de achar/estimar probabilidades. A primeira é achar $P(A)$ ou seja, na população, qual a probabilidade de seu namorado ter outra ? A melhor coisa a fazer aqui é buscar esta probabilidade no IBGE ou similar. Se não for possível, você precisa fazer um esforço e desconsiderar a existência do evento B para esta estimativa. No nosso exemplo, há alguns estudos que sugerem que 4 parceiros casados (em 100) traem seus cônjuges ao ano. ([Sil12, pág 252]). Então $x = 0.04$.

Continuemos. Agora precisa-se descobrir qual a probabilidade da calcinha aparecer no seu armário dado que seu namorado tem outra. O desgraçado podia ter mais cuidado, pelo menos. Vamos estimar em 50%, ou seja $y = 0.5$.

Mais uma probabilidade condicional. Agora, a probabilidade é a calcinha ter aparecido, mas seu namorado está inocente. As hipóteses são várias: a. você comprou a calcinha e esqueceu. b. A pessoa que lava e cuida de suas roupas fez uma confusão qualquer. c. Uma amiga de toda a confiança usou sua lavaroupa e ... d. A calcinha é do seu namorado. ... Tudo muito pouco provável, então $z = 0.05$ ou 5% apenas.

Finalmente, vai-se calcular o que se pretendia, a saber: qual a probabilidade de você estar portando vistosos chifres, dado que a calcinha está lá na gaveta.

$$P(A|B) = \frac{0.04 \times 0.5}{(0.04 \times 0.5) + 0.05 \times (1 - 0.04)} =$$

que é 0.2941. Logo a probabilidade procurada é 29,4%.

Mais um exemplo: Meu peito começou a doer forte. Será que estou tendo um enfarte ? Antes de continuar, um aviso: neste exemplo, todos as probabilidade citadas são fictícias. Então A é ter um enfarte e B é ter dor no peito. Precisamos achar $P(A)$. Considerando a minha faixa etária e o IMC, histórico familar etc, pode-se estimar a probabilidade de ter um enfarte no que me resta de vida estimada em 2%. Logo $x = 0.02$. Agora, $P(B|A)$ ou seja qual a probabilidade de ter dor no peito SE eu estiver enfartando. Pergunte para um médico e ele responderá com 70% ou seja, $y = 0.7$. A seguir, $P(B|\sim A)$, ou seja qual a probabilidade de ter dor no peito, sem ter enfarte algum. Vamos estimar em 40% (ou seja $z = 0.4$). Quero saber $P(A|B)$ ou seja, qual a probabilidade de estar enfartando, dado que meu peito dói. A fórmula é

$$P(A|B) = \frac{0.02 \times 0.7}{(0.02 \times 0.7) + 0.4 \times (1 - 0.02)} =$$

0.0344 ou cerca de 3,4%.

O resultado encontrado depende muito da probabilidade prévia ($P(A)$). Vamos estudar um exemplo, no qual esta probabilidade determina uma mudança radical no resultado. Neste exemplo, suponha que um conhecido vai doar sangue para um amigo que se acidentou e leva um susto. O exame anti-HIV deu positivo. Será que é o caso de ele encomendar logo o terreno no cemitério ? Vamos dividir o exemplo em 2 casos. No primeiro caso seu amigo NÃO faz parte dos grupos de risco (que são ser homossexual ou usar drogas injetáveis). No segundo caso, ele faz parte do grupo de risco. Agora, $P(A)$ é a probabilidade dele ter AIDS. $P(B)$ é ter recebido um exame anti-HIV positivo. Se ele não pertence ao grupo de risco, $P(A) = 1$ em 10.000 casos. O $P(B|A)$ é praticamente 100%. Finalmente, a $P(B|\sim A)$ é de 10 em 10.000.

Fazendo $x = 0.0001$, $y = 1$ e $z = 0.001$. Calculando, $P(A|B) = 0.09$ ou seja, se ele não pertence aos grupos de risco e recebeu um anti-HIV positivo, a probabilidade de ter AIDS é apenas 9%.

A coisa muda de figura se ele pertence ao grupo de risco. Nesse caso, $P(A)$ é 1 em 100, e portanto o valor de x muda radicalmente, pois agora $x = 0.01$. Os valores de y e de z não mudam, mas a probabilidade procurada $P(A|B) = 0.909$ ou seja, agora a probabilidade dele ter AIDS é 91%.

Nosso último exemplo, usa o fato histórico do atentado às Torres Gêmeas em NY no dia 11 de setembro de 2001. Antes desse dia, a probabilidade de um atentado terrorista era muito baixa, próxima a 0%. Vamos calcular o que aconteceu depois do primeiro avião e sobretudo depois do segundo avião. O $P(A)$ é a chance de um atentado terrorista no qual um avião é atirado contra um prédio. Peritos americanos em segurança avaliavam previamente (antes do 11/set) esta probabilidade em 0.00005 ou 0.005%. Agora $P(B)$ é um choque de avião em Manhattan. $P(B|A)$ é 100%. $P(B|\sim A)$ é um choque de avião por acidente. Essa é fácil: nos 25.000 últimos dias ocorreram 2 eventos: em 1945 um avião bateu no Empire State Building e em 1946 um avião caiu no número 40 de Wall Street. Então $P(A) = 2$ em 25.000 ou $x = 0.00008$ ou $x = 0.008\%$. Calculando tudo certinho, acha-se $P(A|B) = 0.38$.

Agora a grande vantagem do Teorema de Bayes que é usar os mesmos dados numa segunda vez. Nossa segunda vez é usar o teorema após o primeiro avião ter sido jogado contra o prédio. Será que o segundo avião poderia ter sido um acidente ?

Vamos lá. Agora $P(A) = 0.38$ e os demais dados permanecem inalterados. Acha-se $P(A|B) = 0.9998720081$ ou seja, a probabilidade de um atentado terrorista dado que o segundo avião colidiu é de 99,99%, nada mau, para uma teoria que nasceu no século XVIII, não é ?

☞ Para você fazer

1. Suponha que a probabilidade de uma pessoa na população ter alergia séria à ingestão de crustáceos (como por exemplo camarão) é de 0.0208. Pessoas que tem essa alergia e comem camarão incham o rosto em 81 % das vezes. Já a condição de inchaço no rosto ocorre em outras hipóteses também e assim a probabilidade do inchaço ocorrer sem que haja alergia é de 0.4900. Você deve calcular a probabilidade de que alguém seja alérgico dado que ele comeu camarão e seu rosto inchou completamente.

2. Suponha que a probabilidade de um aluno de BSI passar de ano na disciplina de Matemática Discreta é de 0.8300. Pessoas que tiram 10 no 1^o bimestre e depois são aprovadas em MD ocorrem com probabilidade igual a 0.8900. Já às vezes ocorre do sujeito ou sujeita tirar 10 no 1^o bimestre e depois ser reprovado em MD, em 6 % das vezes. Você deve calcular a probabilidade de que alguém ser aprovado dado que ele ou ela tirou 10 no primeiro bimestre. .

1	2