Probabilidade

Probabilidade é o estudo das experiências ao acaso, também chamadas de não determinísticas. Se um dado é lançado ao alto é certo que descerá (evento determinístico) mas não é certo que um 6 vai aparecer. Mas, se repetirmos muitas vezes esta experiência, poderemos começar a contar 2 coisas. O número de lançamentos (n) e o número de vezes em que há sucesso ou seja, o número de vezes em que o 6 aparece (s). Pode-se observar que a razão $f = s/n$ denominada *frequência relativa* torna-se estável, à medida em que aumenta n, aproximando-se de um limite. É esta estabilidade que é a base da teoria das probabilidades.

Define-se aqui um modelo matemático associando probabilidades (ou valores limite das frequências relativas) a cada resultado possível em uma experiência. Como a frequência relativa é sempre um número positivo, e a soma das frequências relativas de todos os resultados é um, exigir-se-á que as probabilidades associadas também satisfaçam a estas 2 regras. A confiança de um modelo matemático para um dado experimento depende da proximidade das probabilidades associadas em relação à frequência relativa real. Isto dá origem a problemas de teste e confiança que formam o objeto de estudo da estatística.

Historicamente a teoria das probabilidades começou com o estudo dos jogos de azar. A probabilidade p de um evento A foi definida como segue

Se A pode ocorrer de s maneiras dentre um total de n maneiras igualmente prováveis, então

$$p = p(A) = \frac{s}{n}$$

Este tipo de espaço constituído de n eventos igualmente prováveis, recebe o nome de espaço equiprovável e são uma classe importantes de espaços finitos de probabilidades.

Espaço Amostral e Eventos

O conjunto S de todos os resultados possíveis de um dado experimento é chamado de *espaço amostral*. Um resultado particular isto é, um elemento de S é denominado *amostra*. Um evento A é um conjunto de resultados ou um subconjunto de S. Em particular o conjunto {a} formado por uma única amostra $a \in S$ de um evento é denominado *evento elementar*. Além disso, o conjunto vazio ϕ e o próprio S são subconjuntos de S e portanto são eventos. ϕ às vezes é chamado evento impossível.

Como o evento é um conjunto pode-se combinar eventos para formar novos eventos usando as operações conhecidas sobre conjuntos.

1. $A \cup B$: é o evento que ocorre se e somente se A ocorre ou B ocorre ou ambos.
2. $A \cap B$: é o evento que ocorre se e somente se A ocorre e B ocorre.
3. A^c: o complementar de A é o evento que ocorre se e somente se A não ocorre.

Dois eventos A e B são denominados *mutuamente exclusivos* se eles são disjuntos, isto é se, $A \cap B = \phi$. Em outras palavras, A e B são mutuamente exclusivos se e somente se não podem ocorrer simultaneamente.

Espaços finitos e probabilidades

Seja S um espaço amostral finito, $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Um espaço finito de probabilidades é obtido associando-se a cada ponto $a_i \in S$ um número real P_i denominado *probabilidade* de a_i satisfazendo as seguintes propriedades

1. Cada p_i é não negativo, ou seja, $p_i \geq 0$.
2. A soma dos p_i é um, ou seja $\sum_{i=1}^{n} = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$

Indica-se $P(A)$ a probabilidade de um evento arbitrário A que é então definida como a soma das probabilidades dos pontos de A. Escreve-se $P(a_i)$ ao invés do que seria correto $P(\{a_i\})$.

Espaços Equiprováveis

As características físicas de um experimento podem sugerir que aos vários resultados do espaço amostral sejam associadas probabilidades iguais. Um tal espaço finito de probabilidades S onde cada ponto amostral tem a mesma probabilidade é chamado *espaço equiprovável*. Em particular se S contém n pontos então a probabilidade de cada ponto é $1/n$. Se um evento A contém r pontos sua probabilidade é $r.1/n = r/n$. Note-se que quando se usa a expressão "ao acaso" está-se referindo sempre a um espaço equiprovável.

Alguns teoremas

Segue-se um teorema importante: Se dois eventos A e B são mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Outro teorema informa que se ϕ é o conjunto vazio e A e B são eventos arbitrários, então

1. $P(\phi) = 0$
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$
3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ ou seja $P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Mais um teorema: Para quaisquer eventos A e B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Probabilidade Condicional

Seja E um evento arbitrário num espaço amostral S com $P(E) > 0$. A probabilidade de que um evento A ocorra uma vez que E tenha ocorrido (a probabilidade condicional de A dado E), indicado por $P(A|E)$ é definida por $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$. Em particular, se S é um espaço equiprovável e se indicarmos o número de elementos do evento A por $|A|$ então $P(A \cap E) = \frac{|A \cap E|}{|S|}$, $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$ e portanto $P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{|A \cap E|}{|E|}$

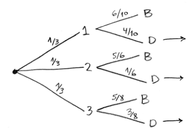
Portanto, se S é um espaço equiprovável e A e E são eventos de S então $P(A|E) = \frac{elementos\ de\ A \cap E}{elementos\ de\ E}$. O numerador é o número de maneiras em que A e E podem ocorrer e o denominador é o número de maneiras em que E pode ocorrer.

Se multiplicarmos em cruz a equação que define a probabilidade condicional $P(A|E) = \frac{|A \cap E|}{|E|}$ e atentarmos para o fato de que $A \cap E = E \cap A$ obtem-se a fórmula util denominada teorema da multiplicação:$P(= E \cap A) = P(E)P(A|E)$

Processos Estocásticos Finitos

Uma sequência finita de experimentos em que cada um deles tem um número finito de resultados possíveis com certas probabilidades é denominado um *processo estocástico*. Uma maneira adequada de descrever o processo e calcular as probabilidades é através de um diagrama de árvore . Para calcular a probabilidade de um determinado galho, usa-se o teorema da multiplicação.

Seja o exemplo: Tem-se 3 caixas. A caixa 1 contém 10 peças, das quais 4 são defeituosas. A caixa 2 contém 6 peças com 1 defeituosa. Finalmente, a caixa 3 tem 8 peças, com 3 defeituosas. Escolhe-se uma caixa ao acaso e retira-se uma peça também ao acaso. Qual a probabilidade de que a peça tenha defeito ? HÁ AQUI DOIS EXPERIMENTOS: A) ESCOLHER UMA CAIXA E B) ESCOLHER UMA PEÇA. O RESULTADO DESSA ÚLTIMA ESCOLHA PODE SER B (PEÇA BOA) OU D (DEFEITUOSA). O DIAGRAMA DE ÁRVORE A SEGUIR RESUME:



A probabilidade de que um ramo da árvore ocorra é – pelo teorema da multiplicação – o produto das possibilidades de cada ramo do caminho. Por exemplo, a probabilidade de escolher a caixa 1 e dela retirar uma peça com defeito é $1/3 \times 4/10 = 2/15$. Como existem 3 caminhos mutuamente exclusivos que conduzem a peças defeituosas, a probabilidade pedida é a soma dos 3 galhos, ou $p = \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{113}{360}$

Independência

Diz-se que um evento B é *independente* de um evento A se a probabilidade de B ocorrer não é influenciada pelo fato de A ter ocorrido ou não. Por isso $P(B)$ é exatamente igual a $P(B|A)$. Substituindo $P(B)$ por $P(B|A)$ no teorema da multiplicação $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ obtem-se

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

A fórmula acima vai ser a nossa definição de independência.

☞ Para você fazer

1. Três estudantes A, B e C estão numa competição de natação. A e B tem a mesma probabilidade de vencer e A tem o dobro da probabilidade de vencer do que C. Calcule a probabilidade de que B ou C vença.
2. Se A e B são eventos e $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = 1/4$, calcule $P(A^c)$.
3. Se A e B são eventos e $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = 1/4$, calcule $P(A^c \cap B^c)$. Dica: use Morgan.
4. Um dado mandrake foi fabricado de maneira a que a probabilidade de um número ocorrer é proporcional ao número (por exemplo, 4 tem o dobro de probabilidade do que o 2). Sejam $A = \{par\}$, $B = \{primo\}$ e $C = \{impar\}$. Determine a probabilidade de que ocorra A mas não B.
5. Determine a probabilidade P de aparecer pelo menos uma coroa no lançamento de 3 moedas honestas.
6. Uma classe é composta de 5 alunos do primeiro ano, 4 do segundo, 8 do terceiro e 3 do quarto. Um aluno é escolhido ao acaso para representar a classe. Qual a probabilidade dele ser do segundo ano ?
7. Se A e B são eventos e $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = 1/4$, calcule $P(A \cup B)$.
8. Seja $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ e seja P uma função de probabilidade sobre S. Calcule $P(a_1)$ se $P(a_2) = 1/3$, $P(a_3) = 1/6$ e $P(a_4) = 1/9$.
9. Determine a probabilidade P de aparecer uma bola branca ao se retirar uma bola de uma urna que contém 4 brancas, 3 vermelhas e 5 azuis.
10. Suponha o espaço $S = \{a_1, a_2, a_3\}$. $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = 1/3$ e $P(a_3) = 4/6$ constituem um espaço de probabilidades sobre S ?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10