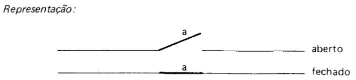
Álgebra de Boole

Em 1854, o inglês George Boole escreveu *An investigation of the laws of thought*, e nele apresentou um sistema matemático de análise lógica conhecido como álgebra booleana. Era o início da *matematização* da lógica. Até então, a lógica pertencera ao reino da filosofia, e agora ela iniciava sua caminhada em direção à matemática, cujo auge seriam os livros de Bertrand Russell e Whitehead, The Principles of Mathematics, no qual ambos tentam provar que matemática = lógica. Não conseguiram e levaram o tiro de misericórdia quando por volta de 1930, o tcheco Kurt Goedel publicou o seu teorema da incompletude.

Em 1938, o americano Claude Shannon usou as idéias de Boole para construir circuitos de telefonia com relés, praticamente criando o campo da eletrônica digital. Este ramo da eletrônica emprega em seus sistemas um pequeno grupo de circuitos básicos padronizados conhecidos como portas lógicas.

Comecemos com o conceito de interruptor:

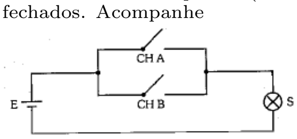


Se considerarmos a corrente elétrica fluindo pelo circuito, pode-se associar a passagem da corrente a um valor lógico (tipicamente V), ou mais adequadamente ao valor 1. Opostamente, a não passagem da corrente, pode ser associada a F, ou neste caso ao valor 0.

Acompanhe-se a seguinte transposição:

fenômeno	lógica clás.	álg.booleana
inter. aberto	F	0
inter. fechado	V	1

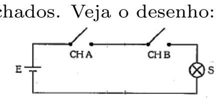
Imagine-se agora 2 interruptores ligados em paralelo. Nesta a corrente vai passar se pelo menos um dos interruptores (ou até os 2) estiverem fechados. Acompanhe



Tal fato é representado na álgebra de boole pela expressão $a + b$ sendo a e b os interruptores que estão ligados em paralelo. Salta aos olhos que está-se falando na proposição lógica $a \vee b$. Se se pretender escrever uma tabela verdade para este circuito, vai aparecer aquela nossa velha conhecida:

a	b	$a+b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

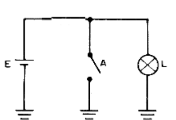
Imagine-se agora 2 interruptores ligados em série, um depois do outro. Neste caso a corrente só vai passar pelo circuito se ambos estiverem fechados. Veja o desenho:



Na álgebra de boole, este fato é representado por $a.b$, sendo a e b os interruptores. Não é coincidência, que na lógica este é o circuito $\wedge$, que representa a expressão $a \wedge b$. Olhemos a tabela verdade:

a	b	$a.b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

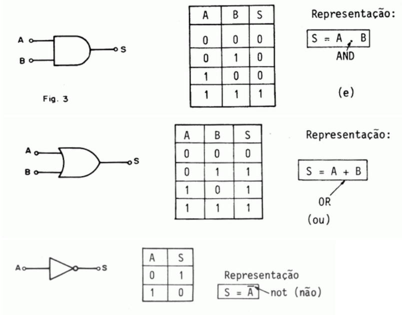
Agora, vai-se apresentar o circuito que implementa a função não. A corrente passa quando o circuito está aberto e não passa quando o circuito está fechado.. Veja



Note que a operação não da lógica é representada na álgebra de boole como $\bar{a}$ para o circuito a. Note-se que alguns livros, com dificuldade em representar $\bar{a}$ contentam-se em usar a representação a' para a negação. Sua tabela verdade

a	$\bar{a}$ ou a'
1	0
0	1

Em termos de representação em portas lógicas, as convenções são:



Álgebra de Boole

A teoria de boole está fundamentada em 7 postulados a saber:

Postulado	descrição
1	x=0 ou x=1
2	0.0=0
3	1.1=1
4	0+0=0
5	1+1=1
6	1.0=0.1=0
7	1+0=0+1=1

Baseado nestes postulados, diversos teoremas podem ser apresentados:

N.	Lei	báse	dual
1	Comutativa	A+B = B+A	A.B=B.A
2	Associativa	(A+B)+C = A+(B+C)	(A.B).C = A.(B.C)
3	Distributiva	A.(B+C) = A.B+A.C	A+(B.C) = (A+B).(A+C)
4	Identidade	A+A = A	A.A = A
5	Negação	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\overline{A}} = A$
6	Redundância	A+A.B = A	A.(A+B) = A
7.1	Elemento neutro	0+A = A	1.A = A
7.2	Elemento absorvente	1+A = 1	0.A = 0
8	operação com oposto	$\overline{A}$+A = 1	$\overline{A}$.A = 0
9		A+$\overline{A}$.B = A+B	A.($\overline{A}$+B) = A.B
10	De Morgan	$\overline{A+B} = \overline{A}.\overline{B}$	$\overline{A.B} = \overline{A}+\overline{B}$

Os teoremas 1,2 e 3 mostram que as leis básicas da álgebra se aplicam à álgebra binária. A lei da negação só se aplica à álbegra booleana. A lei da redundância pode ser comprovada como:
A+A.B=A, colocando o A em evidencia
A.(1+B)=A
A.1=A
A=A, ou seu dual
A.(A+B)=A
A.A+A.B=A
A+A.B=A
A.(1+B)=A
A.1=A
A=A

Os teoremas 7.1, 7.2 e 8 são teoremas da álgebra booleana. O T9 pode ser demonstrado como
A+$\overline{A}$.B=A+B, expandindo
(A+$\overline{A}$).(A+B)=A+B
1.(A+B)=A+B
A+B=A+B

O T10 é o nosso já conhecido De Morgan.

Note-se que estas manipulações algébricas são muito indicadas quando se pretende simplificar um circuíto, ou seja construir um circuíto que tenha o mesmo comportamento mas que tenha menos componentes (já que isto significa menos custos e menos complexidade). Outra maneira de obter tal simplificação é através dos mapas de Veitch-Karnaugh.

☞ Para você fazer

1. No primeiro exercício você vai receber 3 expressões lógicas e deve desenhar o circuito elétrico que vai atendê-lo. O número de entradas varia em cada caso (conforme a expressão), mas a saída só tem dois valores (0 ou 1). Desenhe os circuitos em uma folha anexa e coloque nela seu nome e o código 1 .

```
(A+L)'
(G.J).L
(D+M).(D+M)
```

2. No segundo exercício, você também vai receber 3 expressões lógicas. Construa as tabelas verdade para cada expressão. Entregue o resultado na mesma folha acima.

```
(H+L)'
(G.L)+M
(((D.H).((D.M)'))')
```

3. No terceiro exercício, você vai receber a descrição de um problema e deve pensar em um circuito elétrico que o resolva. Especial atenção às entradas (quantas e quais) e às saídas (quantas e quais, também). Desenhe a tabela verdade para o problema. Se quiser, desenhe o circuito também. Uma escola modernosa bolou uma sala de aula bacana. Nela há 3 interruptores: na porta de entrada; na mesa do professor e na sala do diretor. Se dois interruptores estiverem ligados, as luzes devem estar acesas. Se o diretor ligar o seu, as luzes devem ser acesas. Em qualquer outro caso, as luzes devem ficar apagadas.