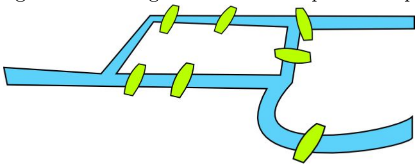
CEP-UFPR-UTFPR-PUC/Pr-UP Sistemas de Informação 16/09/2024 - 09:51:49.2
Matemática aplicada Prof Dr P Kantek
(pkantek@gmail.com)
VIVXq81a V: 1.02
76506 CARLOS EDUARDO ANTAO
24CC2405 - 1 ______ / ______ / ______

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

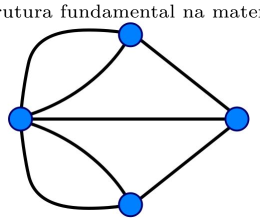
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

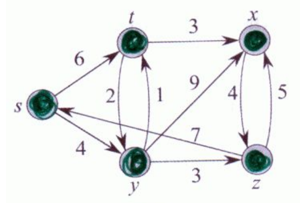
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

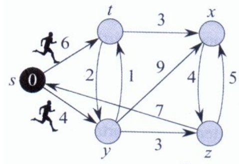


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

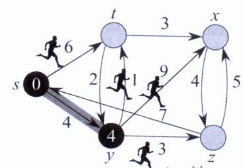
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b) t=0

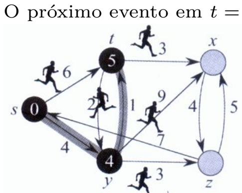
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c) t=4

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



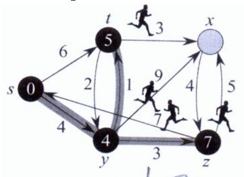
(d) t=5

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

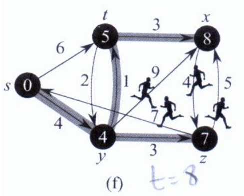
No tempo $t = 7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

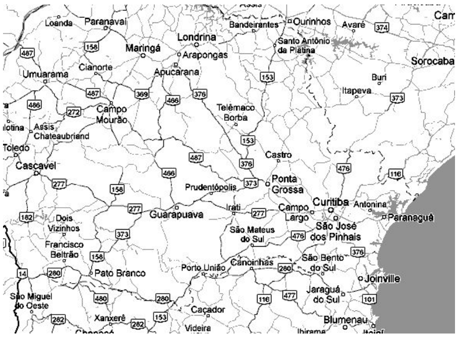
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 8 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	3-cascavel	15-xanxere	25
2	1-blumenau	8-londrina	11
3	7-joinville	2-campo mourao	12

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	140	100	55	94	171	143	139	155	105	58	67	36	118	45
180	0	64	61	48	31	149	68	34	111	64	59	42	57	225
220	40	0	101	88	71	189	108	74	151	104	99	82	97	265
119	85	45	0	133	116	88	84	100	50	149	12	127	63	164
236	56	16	117	0	87	205	124	90	167	120	115	98	113	281
149	101	61	30	69	0	118	114	130	80	33	28	11	93	194
31	85	131	86	125	116	0	64	80	30	89	98	67	43	76
221	41	105	102	89	72	190	0	16	152	105	100	83	39	266
245	65	129	126	113	96	214	34	0	176	129	124	107	23	290
69	55	119	116	103	86	38	34	50	0	119	114	97	13	114
262	82	42	143	36	113	231	150	116	193	0	141	124	139	307
253	73	33	134	121	104	222	141	107	184	137	0	115	130	298
138	104	64	19	58	135	107	103	119	69	22	31	0	82	183
222	42	106	103	90	73	191	21	37	153	106	101	84	0	267
155	108	68	36	62	139	124	120	136	86	26	48	17	99	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15
6	2	5	6	5	6	6	9	9	6	6	6	6	9	6
2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
10	12	12	4	12	12	10	10	10	10	12	12	12	10	10
3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
13	12	12	13	13	6	13	13	13	13	13	12	13	13	13
1	10	1	1	1	10	7	10	10	10	1	1	1	10	1
2	2	2	2	2	2	2	8	9	2	2	2	2	9	2
14	14	14	14	14	14	14	8	9	14	14	14	14	14	14
7	14	14	14	14	14	7	14	14	10	14	14	14	14	7
3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	11	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	12	3	3	3
4	11	11	4	11	11	4	4	4	4	11	4	13	4	4
2	2	2	2	2	2	2	8	8	2	2	2	2	14	2
13	11	11	13	11	11	13	13	13	13	11	13	13	13	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R\$	dias
2	R\$	dias
3	R\$	dias

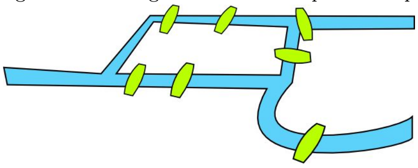
405-76506 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

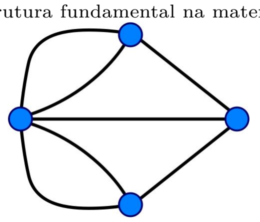
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

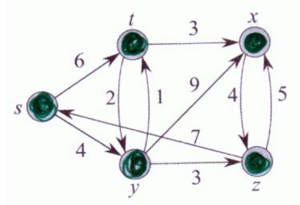
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

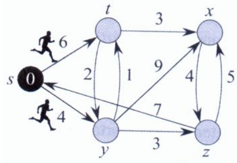


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

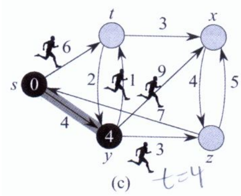
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b)

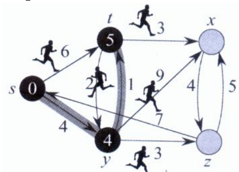
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c)

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



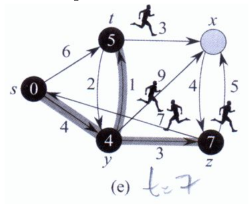
(d)

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

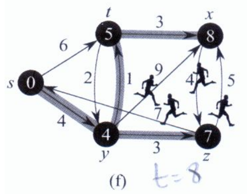
No tempo $t = 7$



(e)

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f)

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
  para S de 1 até N
    para T de 1 até N
      se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
        K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
          se R[S][Q] = 0
            R[S][T] ← Q
          senão
            R[S][T] ← R[S][Q]
          fim{se}
      fim{se}
    fim{para}
  fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

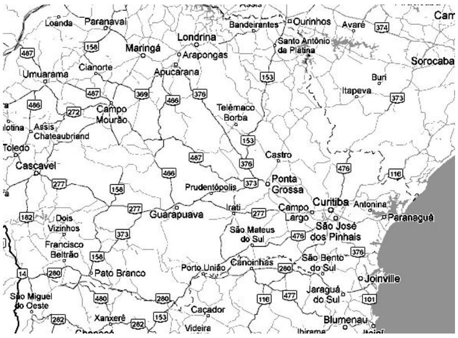
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 5 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	8-londrina	7-joinville	26
2	7-joinville	2-campo mourao	29
3	12-ponta grossa	6-irati	18

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	130	94	20	80	83	68	165	137	100	96	62	70	148	42
143	0	46	83	100	25	131	50	89	163	76	63	101	64	115
97	36	0	117	54	61	165	86	43	197	30	99	55	73	69
97	117	81	0	135	142	48	145	124	80	111	42	136	128	139
83	50	14	103	0	54	151	100	57	183	16	92	41	87	55
155	113	77	58	131	0	106	163	120	138	107	38	132	150	146
49	179	143	69	129	132	0	97	119	32	145	111	119	80	91
146	85	49	166	103	110	214	0	53	246	79	148	104	14	118
193	132	96	213	150	157	261	47	0	293	126	195	151	30	165
211	150	114	231	168	175	279	65	87	0	144	213	169	48	183
67	74	38	87	24	38	135	124	81	167	0	76	25	111	39
117	75	39	20	93	100	68	125	82	100	69	0	94	112	108
42	102	66	62	52	13	110	152	109	142	68	51	0	139	14
163	102	66	183	120	127	231	17	39	263	96	165	121	0	135
70	88	52	90	38	41	138	138	95	170	54	79	28	125	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	15	15	4	15	15	4	4	15	4	15	4	15	4	15
3	2	3	6	3	6	6	8	3	6	3	6	3	8	3
11	2	3	11	11	2	11	2	9	11	11	2	11	9	11
7	12	12	4	12	12	7	7	12	7	12	12	12	7	7
11	3	3	11	5	11	11	3	3	11	11	11	11	3	11
12	12	12	12	12	6	12	12	12	12	12	12	12	12	12
1	1	1	1	1	1	7	10	10	10	1	1	1	10	1
3	3	3	3	3	3	3	8	14	3	3	3	3	14	3
14	14	14	14	14	14	14	14	9	14	14	14	14	14	14
14	14	14	14	14	14	14	14	14	10	14	14	14	14	14
13	5	5	13	5	13	13	5	5	13	11	13	13	5	13
4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	12	3	3	3
1	15	15	1	15	6	1	15	15	1	15	6	13	15	15
8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	14	8
13	5	5	13	5	13	13	5	5	13	5	13	13	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R\$	dias
2	R\$	dias
3	R\$	dias

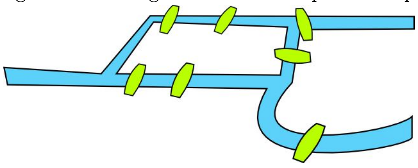
405-76663 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

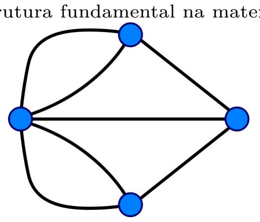
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

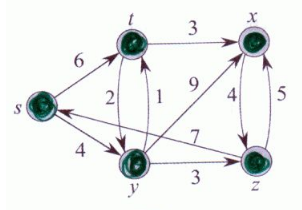
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

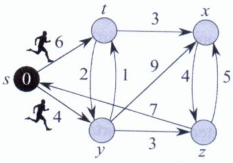


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

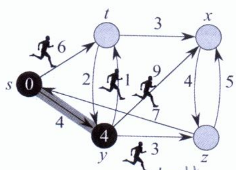
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b) t=0

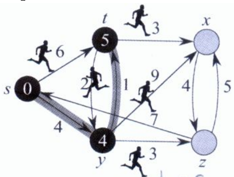
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c) t=4

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



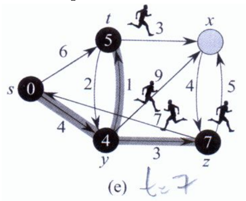
(d) t=5

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

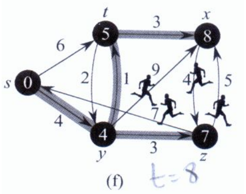
No tempo $t = 7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

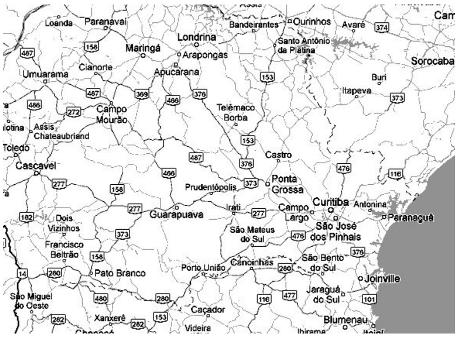
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 7 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	9-maringa	4-curitiba	27
2	9-maringa	15-xanxere	30
3	8-londrina	11-pato branco	16

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	113	156	86	221	168	44	132	133	48	168	131	194	88	206
100	0	43	170	108	67	128	19	20	148	55	96	81	39	93
57	69	0	127	65	24	85	88	28	105	12	53	38	64	50
182	82	125	0	190	82	210	101	102	49	137	45	163	57	175
91	103	34	161	0	58	119	122	62	139	46	87	72	98	84
145	45	88	215	153	0	173	64	65	193	100	29	126	41	138
13	88	131	42	196	124	0	107	108	23	143	87	169	63	181
135	35	78	205	143	102	163	0	55	183	90	131	116	20	128
161	61	104	231	169	128	189	80	0	209	116	157	142	36	154
165	65	108	235	173	132	193	84	85	0	120	161	146	40	158
45	107	87	115	53	62	73	126	115	93	0	91	26	103	38
137	37	80	207	145	37	165	56	57	185	92	0	118	12	130
19	81	61	89	27	36	47	100	89	67	73	65	0	77	12
125	25	68	195	133	92	153	44	45	173	80	121	106	0	118
106	118	49	176	15	73	134	137	77	154	61	102	87	113	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	10	10	7	10	7	7	10	10	10	10	7	10	10	10
3	2	3	3	3	3	3	8	9	3	3	3	3	8	3
11	6	3	11	11	6	11	6	9	11	11	6	11	9	11
12	12	12	4	12	12	12	12	12	10	12	12	12	12	12
3	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2	2	2	2	2	6	2	2	2	2	2	12	2	12	2
1	10	10	4	10	4	7	10	10	10	10	4	10	10	10
2	2	2	2	2	2	2	8	2	2	2	2	2	14	2
14	14	14	14	14	14	14	14	9	14	14	14	14	14	14
14	14	14	14	14	14	14	14	14	10	14	14	14	14	14
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	11	13	13	13	13
14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	12	14	14	14
1	6	15	7	15	6	7	6	15	1	15	6	13	6	15
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	14	2
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R\$	dias
2	R\$	dias
3	R\$	dias

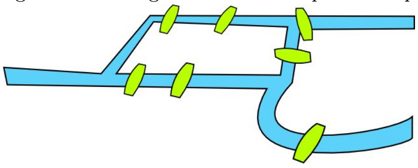
405-76513 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

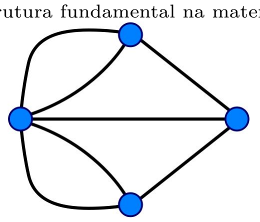
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

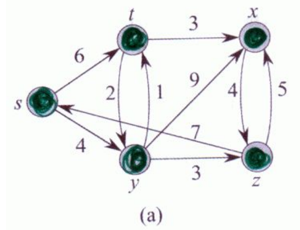
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

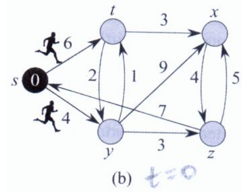
Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:



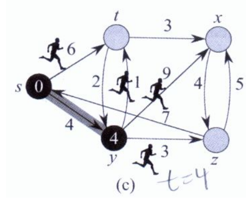
Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se

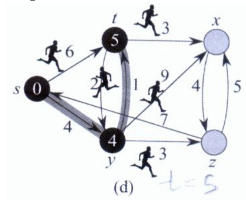


Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$

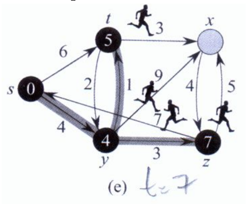


Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

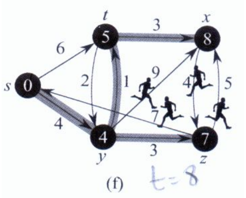
O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

No tempo $t = 7$



dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
  para S de 1 até N
    para T de 1 até N
      se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
        K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
         se R[S][Q] = 0
           R[S][T] ← Q
         senão
           R[S][T] ← R[S][Q]
         fim{se}
      fim{se}
    fim{para}
  fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

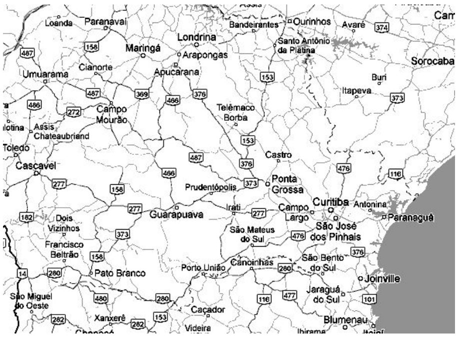
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 9 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	3-cascavel	13-porto uniao	29
2	2-campo mourao	11-pato branco	22
3	14-telemaco borba	10-paranagua	19

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	107	123	14	60	68	58	126	143	98	65	106	20	127	22
111	0	38	125	83	46	169	19	54	88	176	84	131	38	133
203	92	0	217	45	138	261	111	146	180	268	176	223	130	225
81	188	204	0	141	149	44	207	224	84	146	187	101	208	103
158	47	85	172	0	93	216	66	101	135	223	131	178	85	180
132	147	55	146	100	0	190	123	75	109	197	38	152	59	154
37	144	160	51	97	105	0	163	180	40	102	143	57	164	59
222	111	19	236	64	157	280	0	165	199	287	195	242	149	244
270	159	67	284	112	205	328	48	0	247	335	243	290	197	292
23	130	146	37	83	91	81	149	166	0	88	129	43	150	45
200	89	127	214	42	135	258	108	143	177	0	173	220	127	222
94	109	17	108	62	155	152	85	37	71	159	0	114	21	116
34	101	103	48	54	48	92	120	123	132	45	86	0	107	16
73	175	83	87	128	141	131	64	16	50	138	179	93	0	95
76	85	123	90	38	90	134	104	139	173	87	128	42	123	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	15	13	4	15	13	4	15	13	4	13	13	13	13	15
14	2	8	14	8	6	14	8	14	14	14	6	14	14	14
5	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
7	7	7	4	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
2	2	2	2	5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	12	12	12	12	6	12	12	12	12	12	12	12	12	12
1	1	1	1	1	1	7	1	1	10	1	1	1	1	1
3	3	3	3	3	3	3	8	3	3	3	3	3	3	3
8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
14	3	3	14	3	3	14	14	14	14	14	12	14	14	14
1	15	6	1	15	6	1	15	6	1	11	6	13	6	15
10	9	9	10	9	10	10	9	9	10	10	10	10	14	10
13	5	5	13	5	13	13	5	5	5	13	13	13	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

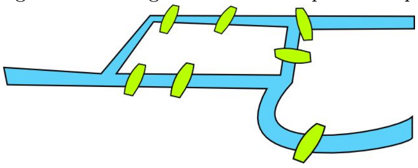
405-76520 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

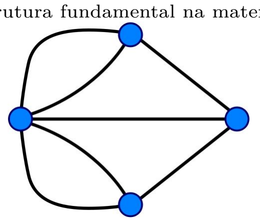
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \rightarrow A \times B, 2 \rightarrow B \times C, 3 \rightarrow B \times D, 4 \rightarrow B \times A, 5 \rightarrow C \times D, 6 \rightarrow D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

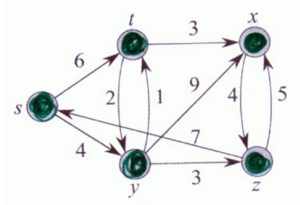
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

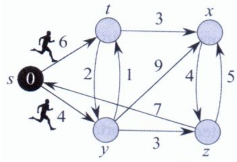


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

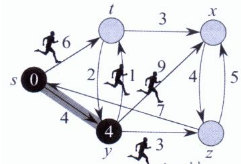
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b) t=0

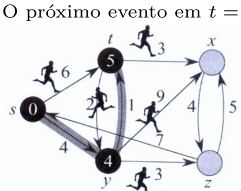
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c) t=4

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



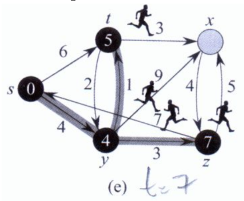
(d) t=5

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

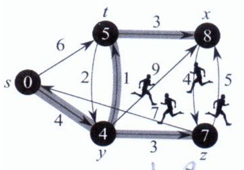
No tempo $t = 7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t,y) chega, mas o que veio de (s,y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t,y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y,t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
   para S de 1 até N
      para T de 1 até N
         se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
            K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
            se R[S][Q] = 0
               R[S][T] ← Q
            senão
               R[S][T] ← R[S][Q]
            fim{se}
         fim{se}
      fim{para}
   fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

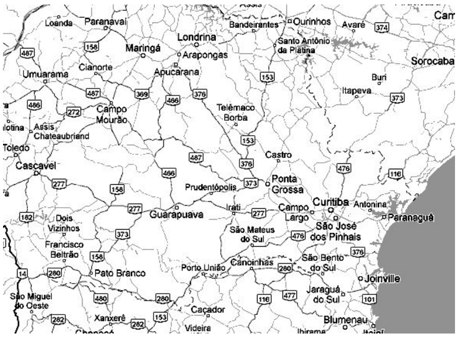
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 9 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	8-londrina	7-joinville	25
2	13-porto uniao	10-paranagua	28
3	15-xanxere	13-porto uniao	18

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	103	80	153	91	62	201	169	104	179	50	109	30	123	77
110	0	27	123	40	172	171	101	36	149	68	79	140	55	97
83	25	0	111	13	145	159	89	24	137	41	67	113	43	70
60	163	140	0	151	122	48	229	164	26	110	169	90	183	137
70	12	39	135	0	132	183	113	48	161	28	91	100	67	57
151	254	231	91	242	0	139	320	255	117	201	47	181	274	228
12	115	92	165	103	74	0	181	116	25	62	121	42	135	89
123	13	40	136	53	185	184	0	49	162	81	92	153	68	110
147	78	105	87	118	209	135	65	0	113	146	43	177	19	175
35	138	115	188	126	97	236	204	139	0	85	144	65	158	112
42	53	30	141	41	104	189	119	54	167	0	97	72	73	29
104	207	184	44	195	166	92	273	208	70	154	0	134	227	181
60	73	50	123	61	32	171	139	74	149	20	79	0	93	47
128	59	86	68	99	190	116	46	95	94	127	24	158	0	156
13	116	93	166	104	75	214	182	117	192	63	122	43	136	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
3	2	3	9	3	3	9	9	9	9	3	9	3	9	3
5	5	3	9	5	5	9	9	9	9	5	9	5	9	5
7	7	7	4	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11	2	2	2	5	11	2	2	2	2	11	2	11	2	11
12	12	12	12	12	6	12	12	12	12	12	12	12	12	12
1	1	1	1	1	1	7	1	1	10	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	8	2	2	2	2	2	2	2
14	14	14	14	14	14	14	14	9	14	14	14	14	14	14
1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1
15	5	3	3	5	15	3	3	3	3	11	3	15	3	15
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	12	4	4	4
15	11	11	6	11	6	6	11	11	6	11	6	13	11	15
12	8	8	12	8	12	12	8	8	12	8	12	12	14	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R\$	dias
2	R\$	dias
3	R\$	dias

405-76537 -

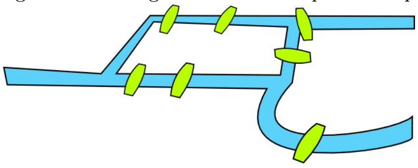
CEP-UFPR-UTFPR-PUC/Pr-UP Sistemas de Informação 16/09/2024 - 09:51:49.2
Matemática aplicada Prof Dr P Kantek
(pkantek@gmail.com)
VIVXq81a V: 1.02
76544 FELIPE JESMIEL LEITE
24CC2405 - 6 ______ / ______ / ______

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

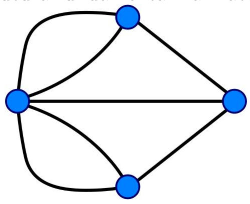
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \rightarrow A \times B, 2 \rightarrow B \times C, 3 \rightarrow B \times D, 4 \rightarrow B \times A, 5 \rightarrow C \times D, 6 \rightarrow D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado eureliano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

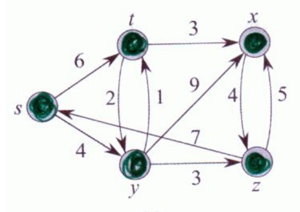
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

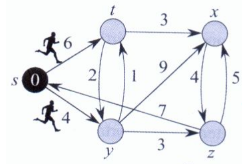


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

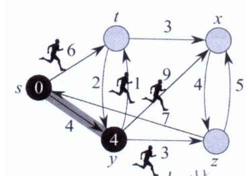
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b)

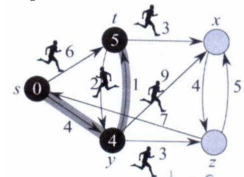
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c)

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



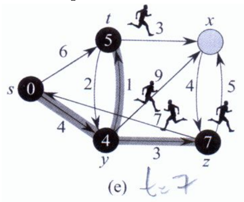
(d)

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

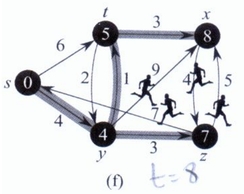
No tempo $t = 7$



(e)

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f)

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

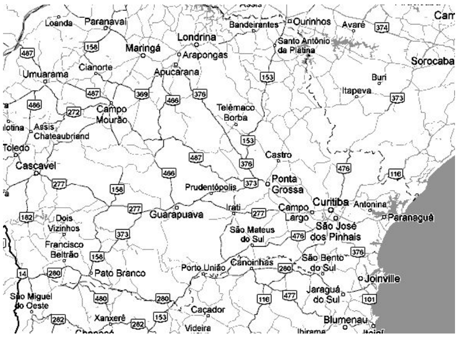
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo

Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 4 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	1-blumenau	5-dois vizinhos	22
2	1-blumenau	3-cascavel	21
3	14-telemaco borba	9-maringa	16

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	165	203	86	271	141	49	214	188	81	207	107	187	183	256
141	0	38	133	206	76	190	49	23	222	142	42	122	18	191
159	18	0	151	224	94	208	67	41	240	160	60	140	36	209
120	79	117	0	185	55	169	128	102	201	121	21	101	97	170
192	51	33	184	0	127	241	100	74	273	22	93	173	69	71
65	24	62	57	130	0	114	73	47	146	66	66	46	42	115
157	116	154	37	222	92	0	165	139	32	158	58	138	134	207
145	34	29	137	210	80	194	0	14	226	146	46	126	22	195
174	33	15	166	239	109	223	82	0	255	175	75	155	51	224
190	149	187	70	255	125	33	198	172	0	191	91	171	167	240
170	29	11	162	64	105	219	78	52	251	0	71	151	47	49
99	58	96	91	164	34	148	107	81	180	100	0	80	76	149
19	49	31	11	84	66	68	98	72	100	20	32	0	67	69
123	65	60	115	188	58	172	31	45	204	124	24	104	0	173
207	66	48	199	15	142	256	115	89	288	37	108	188	84	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
14	2	9	14	14	14	14	14	9	14	14	14	14	14	14
2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	12	12	4	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
11	11	11	11	5	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
13	2	2	13	13	6	13	2	2	13	13	2	13	2	13
4	4	4	4	4	4	7	4	4	10	4	4	4	4	4
14	2	9	14	14	14	14	8	9	14	14	14	14	14	14
3	3	3	3	3	3	3	3	9	3	3	3	3	3	3
7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
3	3	3	3	15	3	3	3	3	3	11	3	3	3	15
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	12	6	6	6
1	11	11	4	11	4	1	11	11	1	11	4	13	11	11
12	8	8	12	12	12	12	8	8	12	12	12	12	14	12
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R\$	dias
2	R\$	dias
3	R\$	dias

405-76544 -

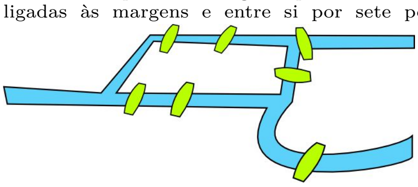
CEP-UFPR-UTFPR-PUC/Pr-UP Sistemas de Informação 16/09/2024 - 09:51:49.2
Matemática aplicada Prof Dr P Kantek
(pkantek@gmail.com)
VIVXq81a V: 1.02
76551 GABRIELA BERNARDO PASQUALOTTO
24CC2405 - 7 _____ / _____ / _____

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

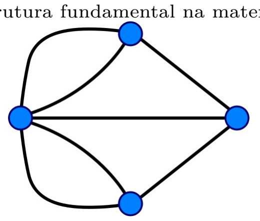
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \rightarrow A \times B, 2 \rightarrow B \times C, 3 \rightarrow B \times D, 4 \rightarrow B \times A, 5 \rightarrow C \times D, 6 \rightarrow D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 \ldots v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bem menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

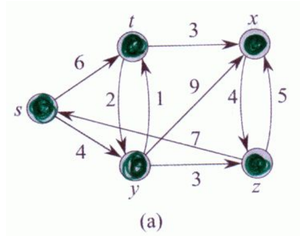
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

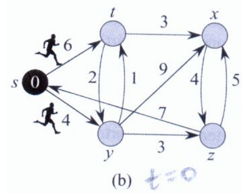
Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:



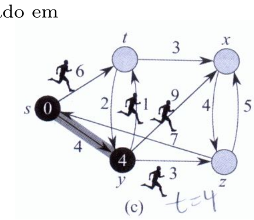
Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se

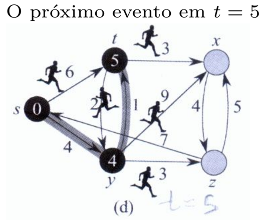


Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$

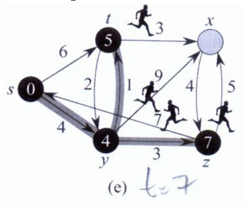


Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

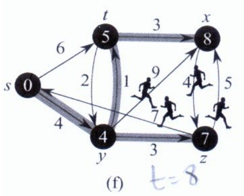
O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

No tempo $t = 7$



dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t,y) chega, mas o que veio de (s,y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t,y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y,t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
   para S de 1 até N
      para T de 1 até N
         se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
            K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
            se R[S][Q] = 0
               R[S][T] ← Q
            senão
               R[S][T] ← R[S][Q]
            fim{se}
         fim{se}
      fim{para}
   fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

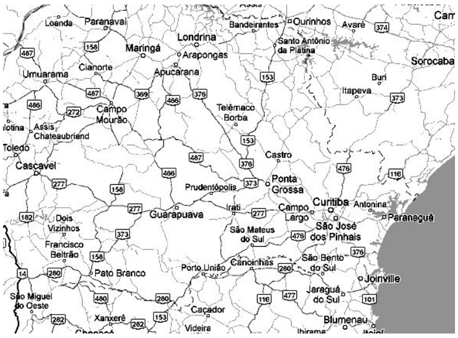
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 8 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	4-curitiba	8-londrina	19
2	13-porto uniao	10-paranagua	30
3	4-curitiba	1-blumenau	23

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	133	160	190	87	149	209	160	148	234	95	169	25	179	69
114	0	27	57	105	16	76	27	15	101	42	36	61	46	87
87	124	0	181	78	140	200	151	139	225	15	160	34	170	60
81	214	241	0	168	230	19	241	229	44	176	250	106	260	150
160	46	73	103	0	62	122	73	61	147	88	82	107	92	133
122	255	282	41	209	0	60	282	270	85	217	20	147	301	191
80	213	240	50	167	229	0	240	228	43	175	249	105	259	149
116	153	29	210	107	169	229	0	17	254	44	189	63	19	89
99	136	12	193	90	152	212	163	0	237	27	172	46	182	72
37	170	197	227	124	186	246	197	185	0	132	206	62	216	106
72	109	136	166	63	125	185	136	124	210	0	145	19	155	45
102	235	262	21	189	251	40	262	250	65	197	0	127	281	171
71	108	135	165	62	124	184	135	123	209	70	144	0	154	44
112	149	25	206	103	165	225	33	13	250	40	185	59	0	85
27	64	91	121	18	80	140	91	79	165	26	100	45	110	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
9	2	9	6	9	6	6	8	9	6	9	6	9	8	9
11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
10	10	10	4	10	10	7	10	10	10	10	10	10	10	10
2	2	2	2	5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	12	12	12	12	6	12	12	12	12	12	12	12	12	12
10	10	10	4	10	10	7	10	10	10	10	10	10	10	10
9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	14	9
3	3	3	3	3	3	3	3	9	3	3	3	3	3	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	11	15	13	15	15
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	12	4	4	4
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	13	15	15
9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	14	9
1	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	11	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

405-76551 -

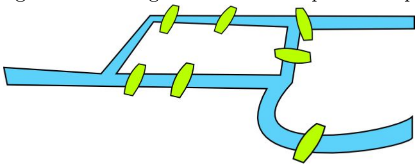
CEP-UFPR-UTFPR-PUC/Pr-UP Sistemas de Informação 16/09/2024 - 09:51:49.2
Matemática aplicada Prof Dr P Kantek
(pkantek@gmail.com)
VIVXq81a V: 1.02
76568 GUILHERME VITOR DA SILVA
24CC2405 - 8 ______ / ______ / ______

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

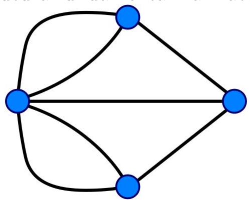
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

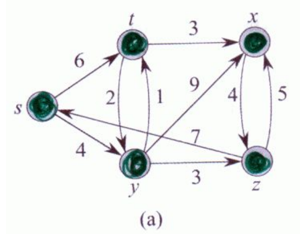
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

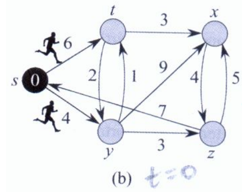
Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:



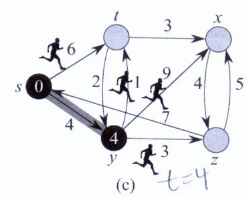
Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se

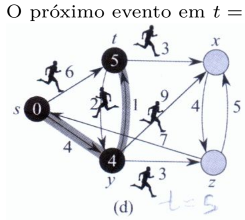


Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$

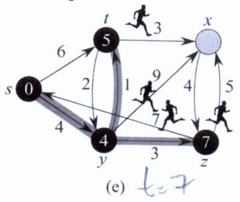


Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

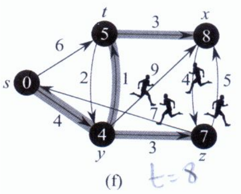
No tempo $t = 7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t,y) chega, mas o que veio de (s,y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t,y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y,t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
   para S de 1 até N
      para T de 1 até N
         se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
            K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
            se R[S][Q] = 0
               R[S][T] ← Q
            senão
               R[S][T] ← R[S][Q]
            fim{se}
         fim{se}
      fim{para}
   fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

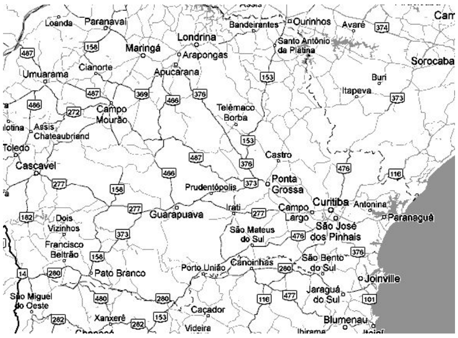
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 13 \rightarrow 6 \rightarrow 14 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati = $13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 5 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba = $20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \rightarrow 13 \rightarrow 6 \rightarrow 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 6 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	10-paranagua	5-dois vizinhos	30
2	7-joinville	11-pato branco	18
3	5-dois vizinhos	13-porto uniao	12

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	200	175	70	230	97	42	156	178	110	192	95	65	109	239
164	0	123	130	178	45	102	104	21	88	140	155	125	57	187
93	67	0	163	55	107	135	171	88	155	17	188	75	124	64
116	130	105	0	160	109	54	86	108	40	122	25	77	39	169
103	12	135	142	0	57	114	116	33	100	27	167	85	69	74
128	112	87	94	142	0	66	68	90	52	104	119	89	21	151
62	158	133	28	188	55	0	114	136	68	150	53	23	67	197
112	44	19	131	74	89	103	0	22	89	36	156	94	58	83
143	127	102	109	157	136	81	83	0	67	119	134	104	36	166
76	172	147	42	202	69	14	128	150	0	164	67	37	81	211
76	50	173	146	38	90	118	154	71	138	0	171	58	107	47
121	105	80	87	135	114	59	61	83	45	97	0	82	14	144
39	144	119	109	174	32	81	100	122	84	136	134	0	53	183
107	91	66	73	121	100	45	47	69	31	83	98	68	0	130
29	155	130	99	185	43	71	111	133	95	147	124	11	64	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
9	2	9	9	9	6	9	9	9	9	9	9	9	9	9
11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
10	12	12	4	12	10	10	12	12	10	12	12	10	12	12
11	2	2	2	5	2	2	2	2	2	11	2	11	2	11
14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
13	4	4	4	4	13	7	4	4	4	4	4	13	4	4
3	2	3	9	3	2	9	8	9	9	3	9	3	9	3
14	14	14	14	14	14	14	14	9	14	14	14	14	14	14
7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
15	5	5	15	5	15	15	5	5	5	11	15	15	5	15
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	12	14	14	14
1	6	6	1	6	6	1	6	6	6	6	1	13	6	6
10	8	8	10	8	10	10	8	8	10	8	10	10	14	8
1	13	13	1	13	13	1	13	13	13	13	1	13	13	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

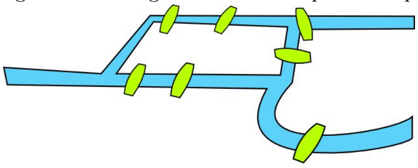
405-76568 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

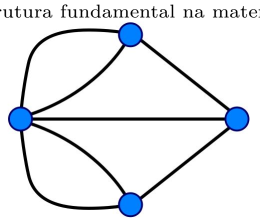
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo

$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \rightarrow A \times B, 2 \rightarrow B \times C, 3 \rightarrow B \times D, 4 \rightarrow B \times A, 5 \rightarrow C \times D, 6 \rightarrow D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:

$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$

ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 \ldots v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

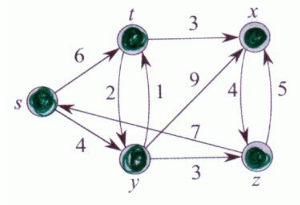
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

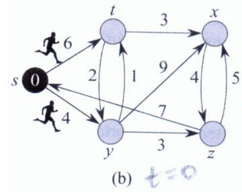


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

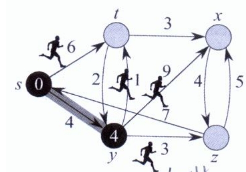
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b)

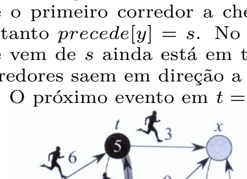
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c)

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



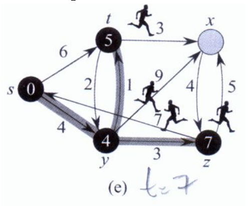
(d)

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

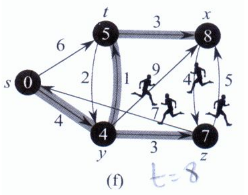
O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

No tempo $t = 7$



dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
  para S de 1 até N
    para T de 1 até N
      se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
        K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
        se R[S][Q] = 0
          R[S][T] ← Q
        senão
          R[S][T] ← R[S][Q]
        fim{se}
      fim{se}
    fim{para}
  fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

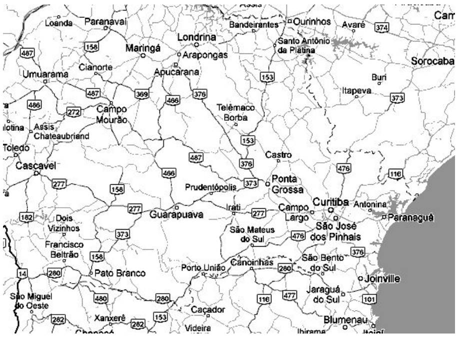
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 7 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	5-dois vizinhos	10-paranagua	18
2	3-cascavel	4-curitiba	19
3	1-blumenau	15-xanxere	19

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	111	86	244	76	69	73	155	117	293	39	196	23	155	42
236	0	42	200	312	157	284	111	73	249	275	152	259	111	278
194	27	0	158	270	115	242	69	31	207	233	110	217	69	236
36	147	122	0	112	105	84	191	153	49	75	232	59	191	78
145	44	17	175	0	132	168	86	48	224	27	127	118	86	75
278	42	84	242	354	0	326	153	115	291	317	194	301	153	320
25	136	111	269	101	94	0	180	142	318	64	221	48	180	67
136	40	13	100	212	57	184	0	44	149	175	52	159	11	178
163	27	51	127	239	84	211	38	0	176	202	79	186	38	205
39	150	125	283	115	108	35	194	156	0	78	235	62	194	81
118	74	47	205	82	137	141	116	78	254	0	157	91	116	48
84	195	170	48	160	153	132	239	201	97	123	0	107	239	126
27	88	63	221	53	46	50	132	94	270	16	173	0	132	19
125	36	47	89	201	46	173	34	78	138	164	41	148	0	167
70	78	51	209	34	89	93	120	82	258	59	161	43	120	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
9	2	3	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
1	1	1	4	1	1	10	1	1	10	1	1	1	1	1
11	3	3	3	5	3	11	3	3	3	11	3	11	3	11
2	2	2	2	2	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1	1
14	3	3	14	14	14	14	8	3	14	14	14	14	14	14
14	2	8	14	14	14	14	8	9	14	14	14	14	14	14
1	1	1	1	1	1	7	1	1	10	1	1	1	1	1
15	3	3	3	15	15	15	3	3	3	11	3	15	3	15
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	12	4	4	4
1	6	11	11	15	6	7	11	11	11	11	11	13	11	15
12	2	8	12	12	6	12	8	8	12	12	12	12	14	12
13	5	5	5	5	13	13	5	5	5	13	5	13	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

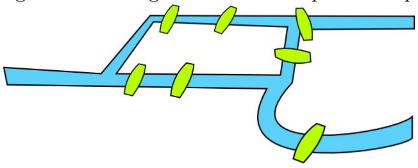
405-76575 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

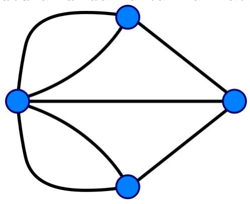
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 \ldots v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

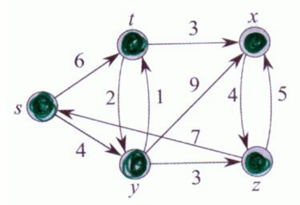
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

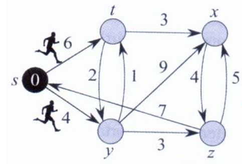


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

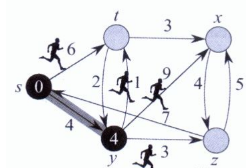
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b) t=0

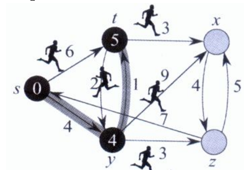
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c) t=4

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



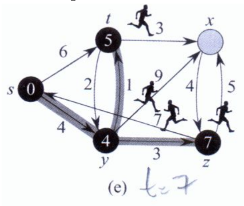
(d) t=5

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

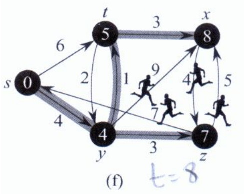
O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

No tempo $t = 7$



dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

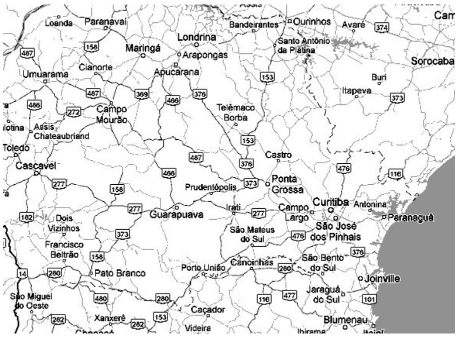
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo

Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extra-luxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 9 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	7-joinville	8-londrina	24
2	9-maringa	10-paranagua	18
3	4-curitiba	10-paranagua	12

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	130	102	45	113	116	95	185	207	81	133	64	74	159	97
133	0	95	86	23	48	136	55	77	122	43	57	65	29	57
161	28	0	114	51	14	164	83	105	150	37	85	31	57	51
47	85	57	0	68	71	50	140	162	36	88	19	29	114	52
150	17	112	103	0	65	153	72	94	139	20	74	82	46	34
147	14	109	100	37	0	150	69	91	136	57	71	17	43	40
24	154	126	69	137	140	0	209	231	20	157	88	98	183	121
157	24	119	110	47	72	160	0	101	146	67	81	89	53	81
157	24	119	110	47	72	160	25	0	146	67	81	89	53	81
11	141	113	56	124	127	14	196	218	0	144	75	85	170	108
180	47	142	133	30	95	183	102	124	169	0	104	112	76	14
76	66	38	29	89	52	79	121	143	65	75	0	58	95	81
189	56	151	142	39	104	192	111	133	178	59	113	0	85	23
104	33	66	57	56	19	107	26	48	93	76	28	36	0	59
166	33	128	119	16	81	169	88	110	155	36	90	98	62	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
14	2	14	14	5	14	14	14	14	14	5	14	14	14	5
6	6	3	6	6	6	6	6	6	6	11	6	6	6	11
10	12	12	4	13	12	10	12	12	10	13	12	13	12	13
2	2	2	2	5	2	2	2	2	2	11	2	2	2	11
2	2	2	2	2	6	2	2	2	2	2	2	13	2	13
1	1	1	1	1	1	7	1	1	10	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	8	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	8	9	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	7	1	1	10	1	1	1	1	1
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	11	15	15	15	15
4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	12	4	3	4
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	13	15	15
12	6	12	12	6	6	12	8	9	12	6	12	6	14	6
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

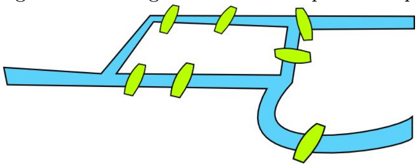
405-76694 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

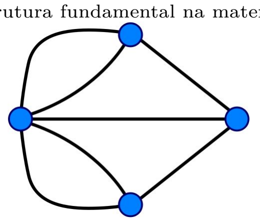
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

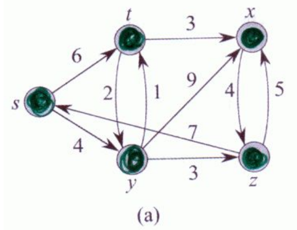
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

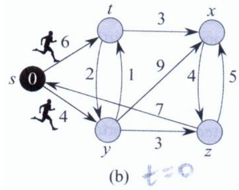


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

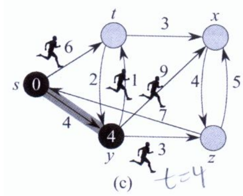
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b)

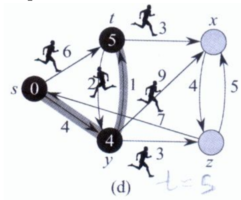
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c)

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



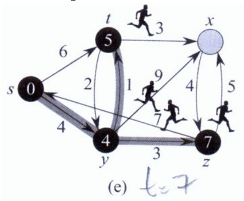
(d)

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

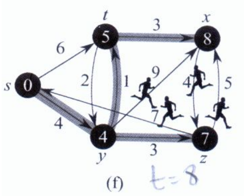
No tempo $t=7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t,y) chega, mas o que veio de (s,y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t,y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z]=7$ e $precede[z]=y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x]=8$ e $precede[x]=t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y]=4$, $dist[t]=6$ e $precede[y]=precede[t]=s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y,t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

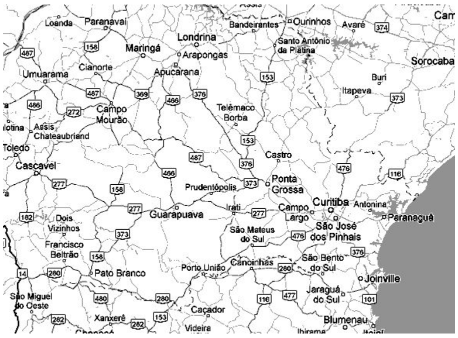
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 5 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	8-londrina	10-paranagua	30
2	10-paranagua	11-pato branco	27
3	3-cascavel	14-telemaco borba	22

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	73	119	89	41	183	80	136	153	41	186	145	137	178	20
193	0	46	90	91	184	165	63	80	234	187	72	138	105	171
147	65	0	44	45	138	119	17	34	188	141	26	92	59	125
103	134	180	0	102	94	75	197	214	144	97	130	48	108	81
225	32	78	122	0	216	197	95	112	266	219	104	170	137	203
157	52	98	54	143	0	129	115	132	198	151	36	102	14	135
28	101	147	117	69	211	0	164	181	69	214	173	165	206	48
273	80	126	170	171	264	245	0	160	314	267	152	218	42	251
224	31	77	121	122	215	196	38	0	265	218	103	169	50	202
23	96	142	48	64	142	39	159	176	0	145	168	96	156	43
252	59	105	149	27	243	224	122	139	293	0	131	197	164	230
121	85	131	18	120	112	93	148	165	162	115	0	66	47	99
55	86	132	100	54	46	27	149	166	96	49	82	0	60	33
231	38	84	128	129	222	203	101	118	272	225	110	176	0	209
246	53	99	143	21	237	218	116	133	287	240	125	191	158	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	15	15	10	15	10	10	15	15	10	10	15	10	15	15
3	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
12	9	3	12	5	12	12	8	9	12	12	12	12	8	12
13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
2	2	2	2	5	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	14	14	12	14	6	12	14	14	12	12	12	12	14	12
1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1	1
14	14	14	14	14	14	14	8	14	14	14	14	14	14	14
2	2	2	2	2	2	2	8	9	2	2	2	2	14	2
1	1	1	4	1	4	7	1	1	10	4	1	4	4	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
4	14	14	4	4	4	4	14	14	4	4	12	4	14	4
7	15	15	6	15	6	7	15	15	7	11	6	13	6	15
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	14	2
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

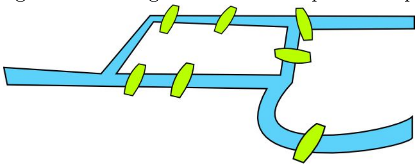
405-76582 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

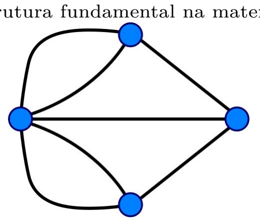
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 \ldots v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

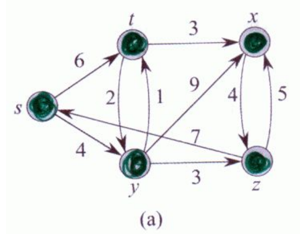
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

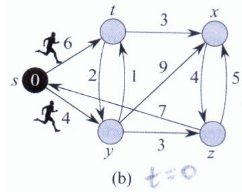
Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:



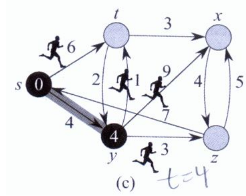
Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se

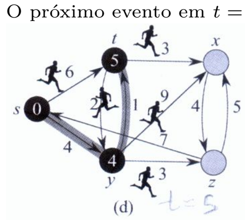


Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$

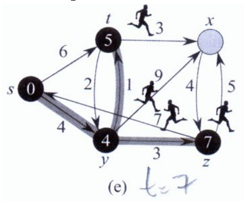


Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

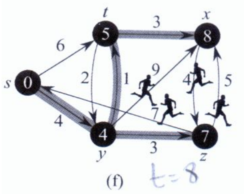
No tempo $t = 7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t,y) chega, mas o que veio de (s,y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t,y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y,t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

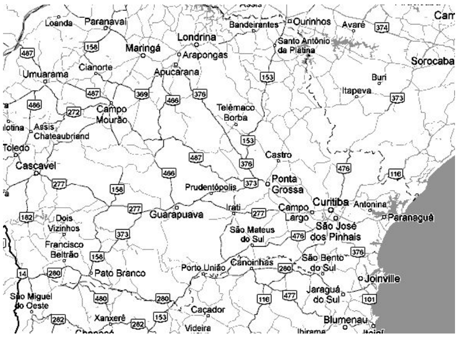
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo

Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 7 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	6-irati	4-curitiba	23
2	5-dois vizinhos	12-ponta grossa	11
3	3-cascavel	5-dois vizinhos	24

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	103	109	63	149	85	19	93	79	24	139	66	46	50	89
109	0	218	172	46	194	128	202	188	133	248	175	155	159	75
118	221	0	181	55	47	137	211	197	142	30	58	164	168	84
96	199	112	0	167	58	25	189	175	120	142	69	19	146	62
63	166	172	126	0	148	82	156	142	87	202	129	109	113	29
172	275	54	235	109	0	191	265	251	196	84	11	218	222	138
104	207	120	44	175	66	0	197	183	128	150	77	27	154	70
189	80	86	252	126	133	208	0	56	213	116	43	235	27	155
133	24	75	196	70	122	152	59	0	157	105	32	179	16	99
139	79	85	43	125	101	68	69	55	0	115	42	62	26	105
88	191	197	151	25	173	107	181	167	112	0	154	134	138	54
161	264	43	224	98	90	180	254	240	185	73	0	207	211	127
77	180	93	140	148	39	96	170	156	101	123	50	0	127	43
162	53	59	225	99	106	181	43	29	186	89	16	208	0	128
34	137	143	97	183	119	53	127	113	58	173	100	80	84	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	10	10	7	10	13	7	10	10	10	10	10	13	10	13
5	2	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
11	11	3	11	11	6	11	11	11	11	11	6	11	11	11
13	13	13	4	13	13	7	13	13	13	13	13	13	13	13
15	15	15	15	5	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
12	12	12	12	12	6	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	13	13	4	13	13	7	13	13	13	13	13	13	13	13
14	14	14	14	14	14	14	8	14	14	14	14	14	14	14
2	2	14	2	2	14	2	14	9	2	14	14	2	14	2
4	14	14	4	14	4	4	14	14	10	14	14	4	14	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	12	3	3	3
15	15	6	15	6	6	15	15	15	15	6	6	13	15	15
9	9	12	9	9	12	9	8	9	9	12	12	9	14	9
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R\$	dias
2	R\$	dias
3	R\$	dias

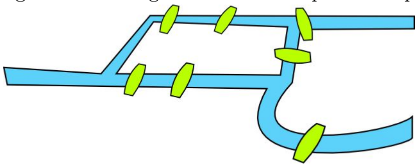
405-76599 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

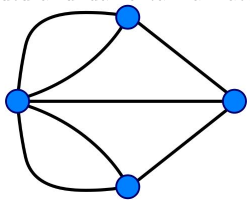
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 \ldots v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

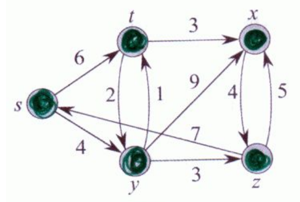
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

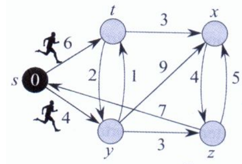


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

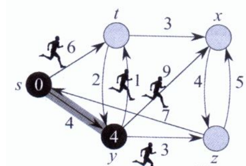
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b)

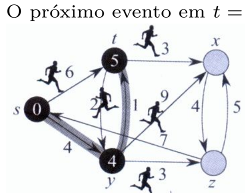
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c)

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



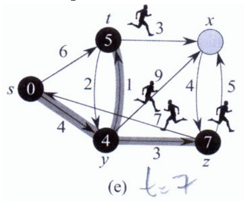
(d)

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

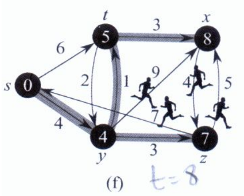
No tempo $t = 7$



(e)

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f)

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

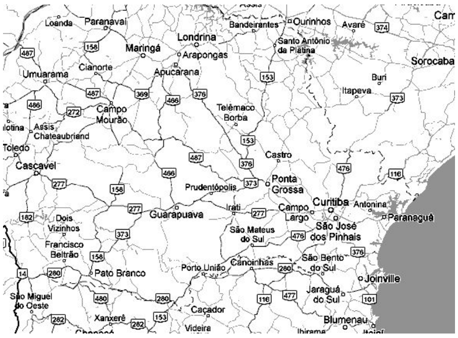
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 7 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	6-irati	9-maringa	17
2	5-dois vizinhos	9-maringa	25
3	14-telemaco borba	5-dois vizinhos	25

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	163	187	55	102	91	35	129	175	78	73	71	27	103	76
122	0	24	177	87	213	157	251	12	200	58	193	138	225	110
98	37	0	153	63	189	133	227	49	176	34	169	114	201	86
18	108	132	0	120	36	46	74	120	28	91	16	45	48	94
35	198	222	90	0	126	70	164	210	113	24	106	51	138	23
81	244	268	136	95	0	116	210	256	159	66	152	20	184	69
38	128	152	20	140	56	0	94	140	43	111	36	65	68	114
156	34	58	211	121	247	191	0	46	234	92	227	172	259	144
120	59	22	175	85	211	155	249	0	198	56	191	136	223	108
42	205	229	97	144	133	77	171	217	0	115	113	69	145	118
64	227	251	119	29	155	99	193	239	142	0	135	80	167	52
101	92	116	156	115	20	136	58	104	179	86	0	40	32	89
61	224	248	116	75	152	96	190	236	139	46	132	0	164	49
102	60	84	157	116	21	137	26	72	180	87	173	41	0	90
12	175	199	67	103	103	47	141	187	90	74	83	28	115	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	7	7	7	13	7	7	7	7	7	13	7	13	7	13
3	2	3	3	3	3	3	3	9	3	3	3	3	3	3
11	2	3	11	11	11	11	11	2	11	11	11	11	11	11
1	12	12	4	1	12	7	12	12	10	1	12	1	12	1
15	15	15	15	5	15	15	15	15	15	11	15	15	15	15
13	13	13	13	13	6	13	13	13	13	13	13	13	13	13
4	4	4	4	4	4	7	4	4	10	4	4	4	4	4
2	2	2	2	2	2	2	8	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	9	3	3	3	3	3	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	10	1	1	1	1	1
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
6	14	14	6	6	6	6	14	14	6	6	12	6	14	6
15	15	15	15	11	15	15	15	15	15	11	15	13	15	15
6	8	8	6	6	6	6	8	8	6	6	6	6	14	6
1	1	1	1	13	1	1	1	1	1	13	1	13	1	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

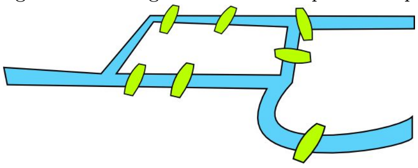
405-76601 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

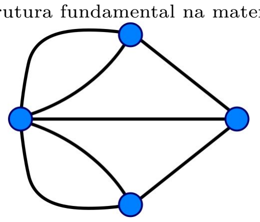
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \rightarrow A \times B, 2 \rightarrow B \times C, 3 \rightarrow B \times D, 4 \rightarrow B \times A, 5 \rightarrow C \times D, 6 \rightarrow D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 \ldots v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

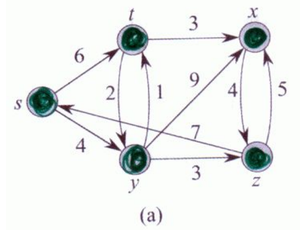
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

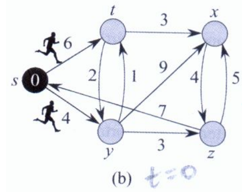
Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:



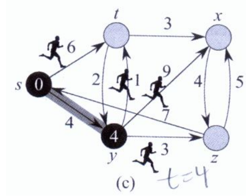
Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se

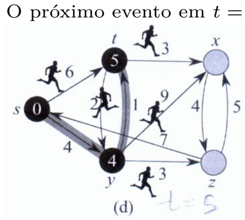


Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$

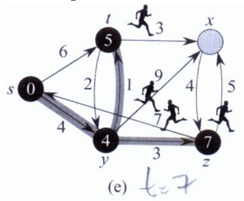


Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

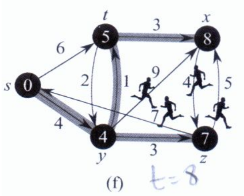
O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

No tempo $t = 7$



dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t,y) chega, mas o que veio de (s,y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t,y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y,t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
  para S de 1 até N
    para T de 1 até N
      se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
        K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
        se R[S][Q] = 0
          R[S][T] ← Q
        senão
          R[S][T] ← R[S][Q]
        fim{se}
      fim{se}
    fim{para}
  fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

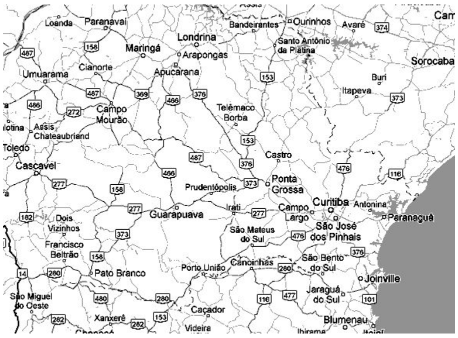
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 7 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	10-paranagua	11-pato branco	15
2	8-londrina	11-pato branco	24
3	5-dois vizinhos	9-maringa	27

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	115	86	53	70	128	30	129	174	42	60	101	98	210	31
156	0	37	184	21	141	139	14	59	198	90	109	128	95	61
185	29	0	213	50	170	168	43	88	227	119	138	157	124	90
271	115	86	0	136	80	254	129	174	313	205	48	243	210	176
135	45	16	163	0	137	118	59	104	177	69	154	107	140	40
203	47	84	231	68	0	186	61	106	245	137	156	175	142	108
316	160	131	45	181	125	0	174	219	358	250	93	288	255	221
242	86	123	270	107	127	225	0	45	284	176	95	214	81	147
197	41	78	225	62	82	180	55	0	239	131	50	169	36	102
282	126	97	11	147	91	265	140	185	0	216	59	254	221	187
66	115	152	94	136	68	49	129	174	108	0	142	38	210	97
223	67	38	251	88	32	206	81	126	265	157	0	195	162	128
28	77	114	56	98	30	11	91	136	70	88	104	0	172	59
237	81	52	265	102	46	220	95	140	279	171	14	209	0	142
95	84	55	123	39	97	78	98	143	137	29	171	67	179	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	15	15	10	15	15	7	15	15	10	15	10	15	15	15
5	2	5	5	5	8	5	8	8	5	5	8	5	8	5
2	2	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	12	12	4	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
15	3	3	15	5	15	15	3	3	15	15	3	15	3	15
2	2	2	2	2	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	4	7	4	4	4	4	4	4	4	4
9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	9	9
2	2	2	2	2	14	2	2	9	2	2	14	2	14	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	10	4	4	4	4	4
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	11	13	13	13	13
3	3	3	3	3	6	3	3	3	3	3	12	3	3	3
1	6	6	7	6	6	7	6	6	1	1	7	13	6	1
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	14	12
11	5	5	11	5	11	11	5	5	11	11	11	11	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

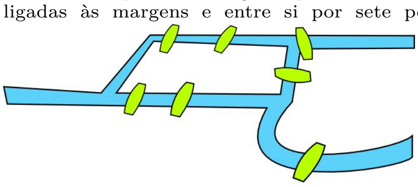
405-76618 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

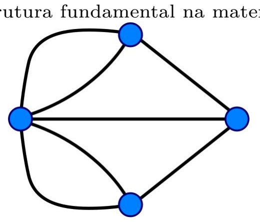
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 \ldots v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

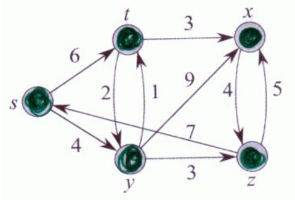
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

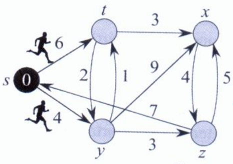


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

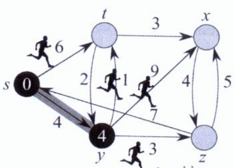
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b) t=0

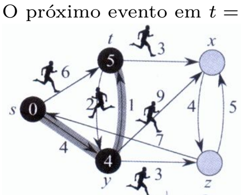
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c) t=4

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



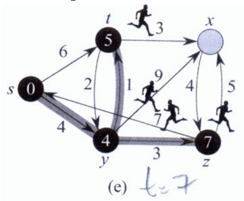
(d) t=5

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y, t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

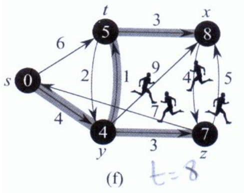
No tempo $t = 7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

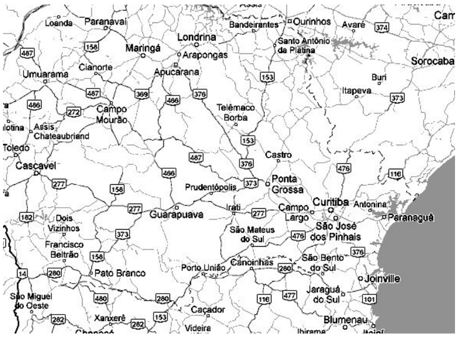
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 7 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	8-londrina	12-ponta grossa	19
2	8-londrina	13-porto uniao	14
3	8-londrina	9-maringa	29

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	154	91	140	106	69	59	136	175	108	46	176	29	102	74
142	0	63	235	78	41	154	108	21	203	76	271	124	74	104
79	63	0	172	15	101	91	168	84	140	13	208	61	134	41
57	163	148	0	163	126	41	107	151	15	103	36	86	73	131
97	48	18	190	0	89	109	156	69	158	31	226	79	122	59
101	85	22	194	37	0	113	67	106	162	35	230	83	33	63
16	170	107	81	122	85	0	152	191	49	62	117	45	118	90
198	56	119	291	134	97	210	0	44	259	132	327	180	21	160
154	12	75	247	90	53	166	120	0	215	88	283	136	86	116
89	195	180	32	195	158	73	139	183	0	135	68	118	105	163
66	108	78	159	60	88	78	155	129	127	0	195	48	121	28
269	127	190	362	205	168	281	71	115	330	203	0	251	37	231
46	125	62	111	77	40	30	107	146	79	17	147	0	73	45
232	90	153	325	168	131	244	34	78	293	166	361	214	0	194
38	80	50	131	32	60	50	127	101	99	37	167	20	93	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
6	2	6	6	6	6	6	6	9	6	6	6	6	6	6
11	5	3	11	5	11	11	11	5	11	11	11	11	11	11
7	12	7	4	7	7	7	12	12	10	7	12	7	12	7
3	2	3	3	5	2	3	2	2	3	3	3	3	2	3
3	3	3	3	3	6	3	14	3	3	3	3	3	14	3
1	1	1	10	1	1	7	1	1	10	1	10	1	1	1
9	9	9	9	9	9	9	8	9	9	9	9	9	14	9
2	2	2	2	2	2	2	2	9	2	2	2	2	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4	4	10	4	4	4	4	4
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	11	15	15	15	15
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	12	14	14	14
7	6	6	7	6	6	7	6	6	7	11	7	13	6	11
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	14	8
1	5	5	13	5	13	13	13	5	13	13	13	13	13	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

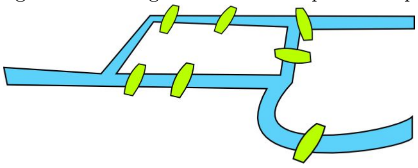
405-76625 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

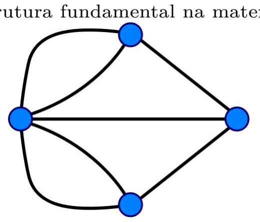
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \rightarrow A \times B, 2 \rightarrow B \times C, 3 \rightarrow B \times D, 4 \rightarrow B \times A, 5 \rightarrow C \times D, 6 \rightarrow D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

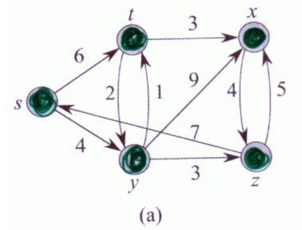
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

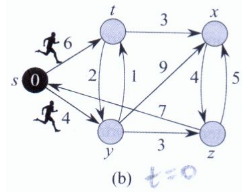
Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:



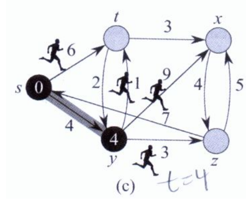
Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se

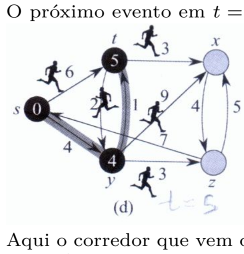


Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$

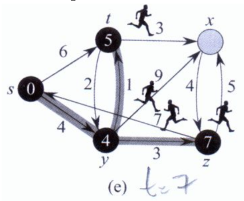


Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

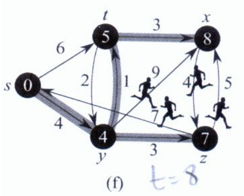
No tempo $t = 7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t, y) chega, mas o que veio de (s, y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t, y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y, t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
   para S de 1 até N
      para T de 1 até N
         se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
            K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
            se R[S][Q] = 0
               R[S][T] ← Q
            senão
               R[S][T] ← R[S][Q]
            fim{se}
         fim{se}
      fim{para}
   fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

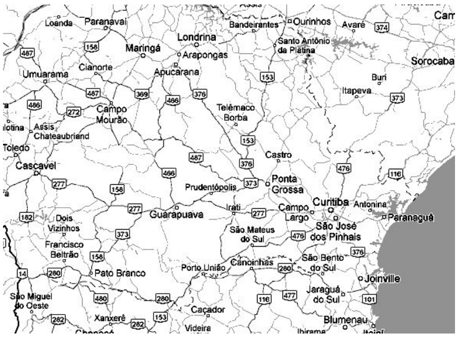
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 9 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	4-curitiba	14-telemaco borba	16
2	1-blumenau	14-telemaco borba	16
3	4-curitiba	12-ponta grossa	21

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	68	103	177	91	44	222	93	106	251	132	147	26	117	117
88	0	35	109	23	127	154	25	38	183	64	79	114	49	49
134	46	0	76	69	94	121	71	84	150	29	46	160	95	95
58	119	154	0	142	95	45	144	157	74	183	47	84	168	168
65	58	12	88	0	106	133	83	96	162	41	58	91	107	26
112	24	59	133	47	0	178	49	62	207	88	103	138	73	73
13	81	116	74	104	57	0	106	119	29	145	121	39	130	130
159	71	25	101	94	119	146	0	13	175	54	71	185	59	120
164	88	42	106	111	124	151	113	0	180	71	76	190	46	137
103	164	199	45	187	140	90	189	202	0	228	92	129	213	213
177	89	43	119	112	137	164	114	127	193	0	89	203	138	138
88	72	107	30	95	48	75	97	110	104	136	0	114	121	121
32	42	77	151	65	18	196	67	80	225	106	121	0	91	91
118	99	53	60	122	78	105	124	11	134	82	30	144	0	148
39	82	36	112	24	83	157	107	120	186	65	82	65	131	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5	2	5	14	5	14	14	8	8	14	5	14	5	14	5
12	2	3	12	2	12	12	2	2	12	11	12	12	2	2
7	12	12	4	12	12	7	12	12	7	12	12	7	12	12
15	3	3	3	5	3	3	3	3	3	3	3	15	3	15
2	2	2	2	2	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	10	1	1	7	1	1	10	1	10	1	1	1
3	3	3	3	3	3	3	8	9	3	3	3	3	9	3
14	3	3	14	3	14	14	3	9	14	3	14	14	14	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	10	4	4	4	4	4
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	11	3	3	3	3
4	6	6	4	6	6	4	6	6	4	6	12	4	6	6
1	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	13	6	6
12	9	9	12	9	12	12	9	9	12	9	12	12	14	9
1	5	5	5	5	1	5	5	5	5	5	5	1	5	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

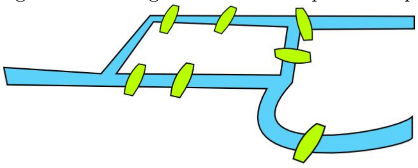
405-76632 -

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

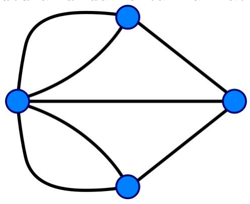
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos

Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices ($F : A \Longrightarrow V \times V$). O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo

$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:

$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$

ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos

A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 ... v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes

A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

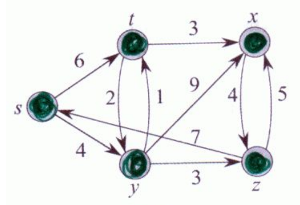
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

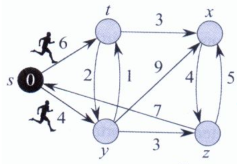


(a)

Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

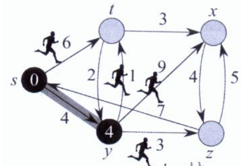
	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se



(b) t=0

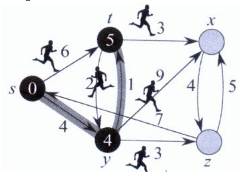
Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em



(c) t=4

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$



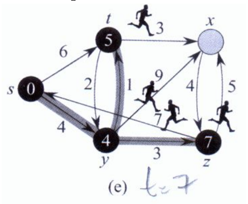
(d) t=5

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

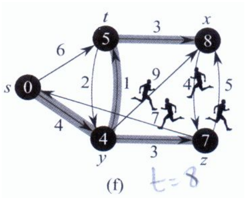
O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

No tempo $t = 7$



dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t,y) chega, mas o que veio de (s,y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t,y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y,t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
    para S de 1 até N
        para T de 1 até N
            se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
                K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
                se R[S][Q] = 0
                    R[S][T] ← Q
                senão
                    R[S][T] ← R[S][Q]
                fim{se}
            fim{se}
        fim{para}
    fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

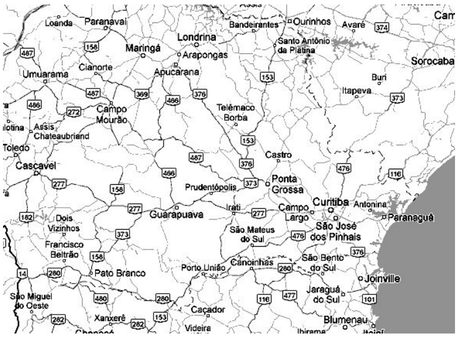
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo

Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \to 7 \to 4 \to 13 \to 6 \to 14 \to 8 \to 3 \to 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \to 3 \to 11 \to 5 \to 15 \to 13 \to 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \to 13 \to 6 \to 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 6 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	7-joinville	11-pato branco	12
2	6-irati	12-ponta grossa	30
3	2-campo mourao	15-xanxere	26

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	96	115	44	127	70	42	73	50	13	158	65	169	26	158
81	0	19	125	31	85	123	24	47	94	62	146	73	72	62
62	27	0	106	12	66	104	51	74	75	43	127	54	88	43
70	105	124	0	136	79	23	82	59	83	167	21	178	35	167
50	17	36	94	0	54	92	41	64	63	31	115	42	76	31
107	26	45	151	57	0	149	50	73	120	88	172	99	98	88
47	143	162	91	174	117	0	120	97	60	205	112	216	73	205
199	118	137	243	149	92	241	0	72	212	180	264	191	48	180
192	111	130	236	142	85	234	41	0	205	173	257	184	41	173
42	83	102	86	114	57	29	60	37	0	145	107	156	13	145
55	49	68	99	41	23	97	73	96	68	0	120	11	81	72
110	84	103	40	115	58	63	61	38	123	146	0	157	14	146
44	38	57	88	69	12	86	62	85	57	100	109	0	70	100
151	70	89	195	101	44	193	47	24	164	132	216	143	0	132
19	115	134	63	146	89	61	92	69	32	177	84	188	45	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	10	10	4	10	10	10	10	10	10	10	4	10	10	10
3	2	3	3	3	3	3	8	9	3	3	3	3	8	3
5	2	3	5	5	5	5	2	2	5	5	5	5	5	5
7	12	12	4	12	12	7	12	12	7	12	12	12	12	12
15	2	2	15	5	11	15	2	2	15	11	15	11	15	15
2	2	2	2	2	6	2	2	2	2	2	2	2	2	2
1	1	1	1	1	1	7	1	1	1	1	1	1	1	1
14	14	14	14	14	14	14	8	14	14	14	14	14	14	14
14	14	14	14	14	14	14	8	9	14	14	14	14	14	14
1	14	14	1	14	14	7	14	14	10	14	1	14	14	14
13	13	13	13	5	13	13	13	13	13	11	13	13	13	5
4	14	14	4	14	14	4	14	14	4	14	12	14	14	14
1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	1	13	1	6
6	6	6	6	6	6	6	8	9	6	6	6	6	14	6
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R$	dias
2	R$	dias
3	R$	dias

405-76649 -

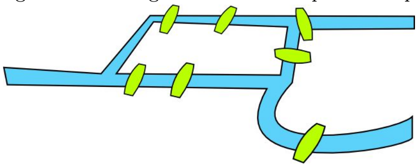
CEP-UFPR-UTFPR-PUC/Pr-UP Sistemas de Informação 16/09/2024 - 09:51:49.2
Matemática aplicada Prof Dr P Kantek
(pkantek@gmail.com)
VIVXq81a V: 1.02
76656 VITOR EDUARDO DE GOES FONTES
24CC2405 - 18 _____ / _____ / _____

Grafos e caminho minimo

Os grafos são um conceito fundamental na moderna matemática. É enorme a quantidade de teoria, livros, algoritmos, teses e dissertações que se fazem/escrevem nos dias de hoje sobre o tema "grafos". A definição formal diz que um grafo é uma associação de 2 conjuntos: o primeiro é uma coleção de vértices, e o segundo é uma coleção de arestas (que conectam de alguma maneira os vértices). Na prática assuma que "mapa" é sinônimo de grafo.

São exemplos de grafos: um mapa rodoviário (cidades e estradas), uma rede de computadores (computadores e ligações entre eles), um mapa de metrô (estações e ligações entre elas), um mapa de infecção de pessoas (pessoas e infecções por contato), um pedaço do facebook (pessoas e quem segue quem), ...

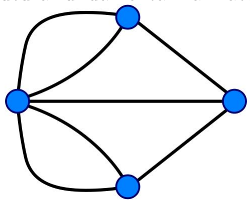
Parece que o inventor do conceito de grafo foi Leonard Euler que foi desafiado a resolver um velho enigma que havia na cidade de K nigsberg, atual Kaliningrado. O problema das pontes de Konigsberg é um famoso quebra-cabeça matemático que surgiu no século XVIII e que marcou o início da teoria dos grafos. A cidade de Konigsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, era cortada pelo rio Pregel e possuía duas ilhas ligadas às margens e entre si por sete pontes.



O desafio: Os moradores da cidade se questionavam se seria possível dar um passeio pela cidade, cruzando cada uma das sete pontes apenas uma vez e retornando ao ponto de partida.

A impossibilidade da solução: Por muitos anos, os habitantes tentaram encontrar uma rota que satisfizesse essas condições, mas sem sucesso. Foi o matemático suíço Leonhard Euler quem, em 1736, provou matematicamente que tal passeio era impossível.

A solução de Euler: Euler abstraiu o problema, representando as diferentes partes da cidade (margens e ilhas) como pontos (vértices) e as pontes como linhas que ligam esses pontos (arestas). Essa representação deu origem ao conceito de grafo, uma estrutura fundamental na matemática discreta.



Ao analisar o grafo correspondente ao problema das pontes, Euler percebeu que para que um caminho Euleriano (um caminho que passa por todas as arestas de um grafo exatamente uma vez) exista, todos os vértices do grafo devem ter um grau par (ou seja, um número par de arestas incidentes), com exceção de, no máximo, dois vértices que podem ter grau ímpar. No caso das pontes de K nigsberg, todos os vértices tinham grau ímpar, o que tornava impossível encontrar um caminho Euleriano.

Grafos Definição formal: um grafo G é uma tripla $G = (V, A, F)$, onde V = conjunto de vértices do grafo; A = conjunto de arestas do grafo e F = função que relaciona arestas e vértices $(F : A \Longrightarrow V \times V)$. O desenho de um gráfico é apenas um instrumento auxiliar (embora muito poderoso) para visualizar as conexões.

Seja o exemplo
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{1 \to A \times B, 2 \to B \times C, 3 \to B \times D, 4 \to B \times A, 5 \to C \times D, 6 \to D \times A\})$ G_1 seria representado como visto na figura representada no quadro.

Representações alternativas para o mesmo grafo:
$G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{1 = (A, B), 2 = (B, C), 3 = (B, D), 4 = (B, A), 5 = (C, D), 6 = (D, A)\})$
ou $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$
$\{(1, A, B), (2, B, C), (3, B, D), (4, B, A), (5, C, D), (6, D, A)\})$

Observação: existe um excelente visualizador de grafos, freeware, denominado DOTGRAPH. Pode ser baixado em www.graphviz.org.

Alguns conceitos A seguir uma descrição dos principais conceitos associados a grafos. Ressalte-se que não existe uma terminologia universal para o tema, sendo a lista a seguir uma compilação das principais notações utilizadas pelos diversos autores.

Define-se ordem do grafo G, ao cardinal $|V|$, que nada mais é que o número de vértices do grafo.

Uma aresta pode ser definida por um par de vértices, que são conhecidos como extremidades da aresta e são conhecidos como vértices adjacentes

Um grafo é dito dirigido (ou digrafo) se suas arestas possuem orientação e nesse caso a aresta receberá o nome de arco. Visualmente falando, a orientação é representada por uma seta no destino da aresta.

Se o grafo não for dirigido ele é dito não dirigido (!). Nesse caso, a representação da aresta ligando os nodos a e b poderá ser representada como (a,b) ou (b,a) indistintamente.

Define-se origem, antecessor ou raiz de um arco ao primeiro vértice no par ordenado que define o arco.

Define-se destino, sucessor ou extremidade de um arco ao segundo vértice no par ordenado que o define.

Diz-se que dois arcos ou arestas são paralelos, quando ambos tem mesma origem e mesmo destino.

Define-se um arco ou aresta laço quando os dois vértices do seu par são iguais.

Se o grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado simples. Se as possui, diz-se que o grafo é multigrafo.

Um grafo completo é aquele que é simples e no qual cada par de vértices distintos é adjacente.

Define-se grau de um vértice $v \in V$, o número de vértices adjacentes a V.

Um vértice que não possui aresta incidente (vértice grau 0) é dito isolado.

Um vértice que só possui uma única aresta incidente (vértice de grau 1) é dito pendente.

Dois vértices a e b são ditos adjacentes quando a linha (a, b) existe no grafo.

Uma sequência de vértices adjacentes $v_1 \ldots v_k$ é dita caminho de v_1 até v_k. Esse caminho é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o comprimento do caminho.

Um ciclo é um caminho que tem início e final no mesmo vértice. Se este caminho for elementar, o ciclo é dito elementar.

Um grafo que não contenha ciclos simples é chamado acíclico.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo uma vez, é chamado hamiltoniano.

Um caminho que contenha cada aresta do grafo uma vez, é chamado euleriano.

Uma árvore é um grafo que não tem ciclos e é conexo.

Representação por matrizes A matriz de adjacência tem V x V elementos. Se for não orientado, o grafo é simétrico em relação à diagonal principal. Se digrafo, a matriz não é simétrica. Laços são representados por um "1" na diagonal principal. As arestas são numeradas da esquerda para a direita e de cima para baixo.

Caminhamento

A questão agora é como visitar todos os nodos. Se o critério exige conhecer todos os caminhos (na busca do menor trajeto, por exemplo) e se o grafo é completo, a quantidade de caminhos a examinar é de $n!$, onde n é o número de vértices. Se o grafo não é completo, o número de caminhos diminui, mas o problema continua NP.

Se se usar um critério mais relaxado, o processamento é bastante menor. A seguir, dois critérios usuais na visitação de um grafo. É de se notar que os dois são também importantes no contexto de árvores, e aqui é até mais fácil deles serem entendidos.

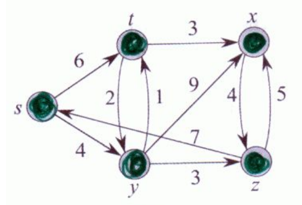
A busca em profundidade segue o procedimento básico: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma pilha (LIFO) os vértices adjacentes.

A busca em largura: ao chegar em um nodo, o algoritmo guarda em uma fila (FIFO) os vértices adjacentes.

Caminho mínimo: algoritmo de Dijkstra

(dica: O autor é um holandês e seu nome é lido como "Dicstêr").

Para entender este problema é util imaginar o grafo espalhado em uma área qualquer e pensar em corredores humanos fazendo trajetos sobre o grafo. Embora o algoritmo de Dijkstra funcione de maneira ligeiramente diferente é útil fazer esta analogia. Suponha um grafo como este:

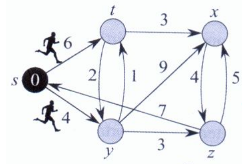


(a)

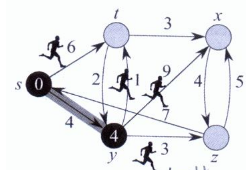
Por evidente, pode-se construir uma matriz de adjacência como segue

	s	t	x	y	z
s	-	6	-	4	-
t	-	-	3	2	-
x	-	-	-	-	4
y	-	1	9	-	3
z	7	-	5	-	-

Escolhido o nodo origem (neste caso o nodo=s) enviam-se os corredores deste nodo a todos os nodos adjacentes. Na simulação, a cada instante que um corredor chega a um vértice, novos corredores saem do vértice sempre se dirigindo a todos os vértices adjacentes. Supondo que os pesos das arestas indicam a quantidade de tempo em minutos que os corredores demoram. O vértice s em negor indica que sabemos que a demora para ir de s a s vale 0. Assim, no instante $t = 0$ tem-se

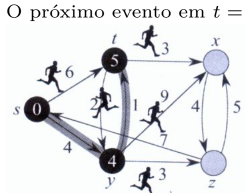

(b) t=0

Quatro minutos mais tarde (no tempo $t = 4$) chega o corredor que vai ao vértice y o que é mostrado em


(c) t=4

Como esse corredor é o primeiro a chegar a y sabe-se que $dist[y] = 4$ e portanto o vértice y fica negro na figura. A aresta sombreada (s, y) indica que o primeiro corredor a chegar a y veio de s e portanto $precede[y] = s$. No tempo 4, o corredor que vem de s ainda está em trânsito e nessa hora corredores saem em direção a t, x e z.

O próximo evento em $t = 5$

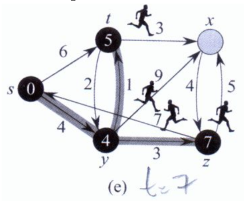

(d) t=5

Aqui o corredor que vem do vértice y chega ao vértice t. O que vem de s a t ainda está no caminho. Como o primeiro a chegar a t veio de y no tempo 5, iguala-se $dist[t] = 5$ e $precede[t] = y$ isto

indicado pela aresta sombreada (y,t). Os corredores saem de t em direção a x e y.

O corredor que vem de s finalmente chega a t no tempo 6, mas o corredor que veio de y já chegou lá antes e portanto o esforço do corredor que foi de s a t foi em vão e ele é desprezado.

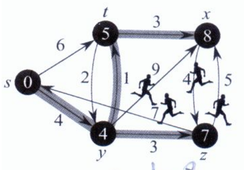
No tempo $t = 7$



(e) t=7

dois corredores chegam ao seu destino. O que fez (t,y) chega, mas o que veio de (s,y) chegou no tempo 4 e portanto a simulação esquece de (t,y). Mas, o corredor que vem de y chega a z e é o primeiro. Fazemos $dist[z] = 7$ e $precede[z] = y$ e os corredores saem de z a caminho de s e x.

O próximo evento ocorre no tempo 8, como em



(f) t=8

quando o corredor que vem de t chega a x. Fazemos $dist[x] = 8$ e $precede[x] = t$ e um corredor sai de x em direção a z. Neste ponto, um corredor já chegou a todos os vértices e a simulação pode parar.

O algoritmo de Dijsktra trata todas as arestas do mesmo jeito. Assim ele processa todos os vértices adjacentes junto, sem nenhuma ordem em particular. Quando ele processa as arestas que saem de s ele declara $dist[y] = 4$, $dist[t] = 6$ e $precede[y] = precede[t] = s$ **até aqui**. Quando o algoritmo considerar mais adiante a aresta(y,t) ele diminuirá o peso do caminho mínimo até o vértice t que encontrou até então, de modo que $dist[t]$ vai de 6 para 5 e $precede[t]$ troca de s para y.

Caminhos mínimos: Floyd modificado

Bibliografia: Introdução à Teoria dos Grafos (Rabuske, UFSC)

Suponha um grafo DIRIGIDO, representado por sua matriz de custos, com sua diagonal principal zerada (sem laços). Esta matriz deve ser assim interpretada: o valor em $C[i][j]$ representa o custo da ligação de i para j. Quando não há ligação, isto deve ser representado por ∞. A matriz original é K_0. A seguir, são calculadas as matrizes K_1, K_2, ... K_n, onde n é a ordem do grafo. Ao mesmo tempo são calculadas as matrizes R_0, R_1, ..., R_n. K_n é a matriz de menores custos de ligação, e R_n é a matriz que indica as rotas.

O algoritmo é

```
Algoritmo FLOYD-MOD
C[n,n] ← matriz de custos.
R[n,n] ← 0
Gerar K, a partir de C (troque 0 por infinito e
  ponha 0 na DP)
para Q de 1 até N
  para S de 1 até N
    para T de 1 até N
      se K[S][Q] + K[Q][T] < K[S][T]
        K[S][T] ← K[S][Q] + K[Q][T]
        se R[S][Q] = 0
          R[S][T] ← Q
        senão
          R[S][T] ← R[S][Q]
        fim{se}
      fim{se}
    fim{para}
  fim{para}
fim{para}
fim algoritmo
```

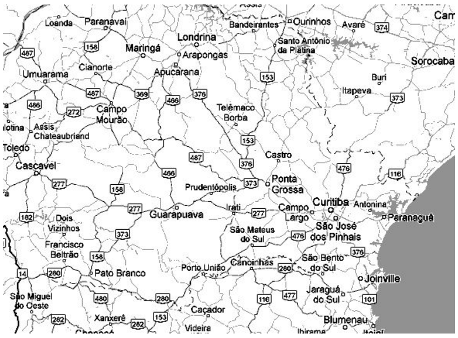
Ao final, as posições de R que tiverem ZERO devem receber o número da coluna de R.

Rotas e tempos mínimos

Suponha que você é o gerente de logística da Empresa PACOLUTOS ELETRÔNICOS S/C que atende a uma determinada região geográfica real dos estados do Paraná e Santa Catarina.

Você precisa regularmente enviar pacolutos para seus clientes localizados nessas cidades. Cada pacoluto pesa um certo número de quilogramas, já que os há de diversos tipos e tamanhos.

Essa área é servida pela JÁFUI transportes especiais, uma empresa de transporte de carga, com a qual a PACOLUTOS ELETRÔNICOS firmou um contrato de exclusividade. As linhas regulares da JÁFUI e seus detalhes estão descritas na tabela a seguir e podem ser colocadas diretamente sobre o mapa anexo. Note que preços que aparecem como 0 (zero) não indicam gratuidade e sim que não está disponível a viagem neste trecho. Os números diferentes de zero indicam o preço por quilograma de material transportado naquele trecho.



A cada trecho, há um custo por quilograma obtido diretamente da tabela de preços. Note que todas as ligações são unidirecionais, já que a JÁFUI atende também a outras empresas e as viagens do contrafluxo já estão todas contratadas (e lotadas). Logo, as viagens do contrafluxo não estão disponíveis para você. As variações de preço se justificam pela tonelagem disponível em cada trecho além de outras regras de negócio da JÁFUI e que não estão sujeitas à discussão. Entretanto, para efeitos deste exercício considere que as disponibilidades de tonelagem nos trechos precificados são praticamente infinitas e não restringem em nada a análise.

Suponha ainda a necessidade de transportar diversas cargas entre 2 cidades no mapa. Você deve descobrir o caminho cujo frete **é mais barato**. Tal escolha deve ser feita ainda que existam caminhos mais curtos (passando por menos cidades) mas que custem mais. O único critério de escolha é o de menor custo por quilograma transportado.

Para efeito de cálculo do tempo gasto pelo transporte, imagine que cada estada em uma cidade demora 1 dia, incluindo-se aí um dia para o despacho na origem e um dia para o recebimento no destino. Assim, se uma carga é transportada em uma única viagem sem cidades intermediárias, ela demora 2 dias. Se a viagem constar de 2 trechos, com uma cidade intermediária, ela demora 3 dias. Se passa em 7 cidades intermediárias, demora 9 dias.

Você não precisa informar por quais cidades a carga passa, apenas o tempo gasto na viagem. Por óbvio, para descobrir o tempo, precisa saber a quantidade de cidades pelas quais o pacote passa.

Exemplo Seja a seguinte situação: Você precisa transportar pacolutos de 7 Kg (o modelo extraluxo), nas seguintes quantidades:

de Paranagua para Pato Branco, 11 pacolutos; de Londrina para Irati, 13 pacolutos; de Curitiba para Telemaco Borba, 20 pacolutos. Sujeito à seguinte tabela de preços:

	BL	CM	CA	CT	DV	IR	JO	LO	MA	PA	PB	PG	PU	TB	XX
1-blumenau	0	0	0	0	0	0	0	0	0	18	0	0	0	0	24
2-campo mourão	0	0	0	0	0	0	0	0	32	0	0	0	0	0	0
3-cascavel	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	0
4-curitiba	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40	0	0
5-dois vizinhos	0	0	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	40
6-irati	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	46	0
7-joinville	22	0	0	33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8-londrina	0	27	39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9-maringá	0	0	0	0	0	0	0	27	0	0	0	0	0	0	0
10-paranaguá	0	0	0	0	0	0	48	0	0	0	0	0	0	0	0
11-pato branco	0	0	0	0	38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12-ponta grossa	0	0	0	22	0	35	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13-porto união	29	0	0	0	0	50	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14-telêmaco borba	0	35	0	0	0	0	0	39	0	23	0	29	0	0	0
15-xanxerê	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	47	0	0

As perguntas são: Qual o preço de cada remessa ? Quantos dias demorará ?

A resposta: Aplicando o algoritmo de Warshall modificado para obter custos e rotas, obtiveram-se a matriz de custo

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	0	202	245	99	300	121	66	206	234	18	262	196	71	167	24
2 -	269	0	98	368	153	290	335	59	32	287	115	365	240	336	193
3 -	171	273	0	270	55	192	237	277	305	189	17	267	142	238	95
4 -	69	171	214	0	269	90	135	175	203	87	231	165	40	136	93
5 -	116	218	40	215	0	137	182	222	250	134	57	212	87	183	40
6 -	139	81	124	97	179	0	117	85	113	69	141	75	137	46	163
7 -	22	204	247	33	302	123	0	208	236	40	264	198	73	169	46
8 -	210	27	39	309	94	231	276	0	59	228	56	306	181	277	134
9 -	237	54	66	336	121	258	303	27	0	255	83	333	208	304	161
10 -	70	252	295	81	350	171	48	256	284	0	312	246	121	217	94
11 -	154	256	78	253	38	175	220	260	288	172	0	250	125	221	78
12 -	91	116	159	22	214	35	152	120	148	104	176	0	62	81	115
13 -	29	131	174	128	229	50	95	135	163	47	191	125	0	96	53
14 -	93	35	78	51	133	64	71	39	67	23	95	29	91	0	117
15 -	76	178	221	175	276	97	142	182	210	94	238	172	47	143	0

e a matriz de rotas

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1 -	1	15	15	10	15	15	10	15	15	10	15	15	15	15	15
2 -	9	2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
3 -	11	11	3	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
4 -	13	13	13	4	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
5 -	15	15	3	15	5	15	15	15	15	15	3	15	15	15	15
6 -	14	14	14	14	14	6	14	14	14	14	14	14	14	14	14
7 -	1	4	4	4	4	4	7	4	4	1	4	4	4	4	1
8 -	3	2	3	3	3	3	3	8	2	3	3	3	3	3	3
9 -	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8
10 -	7	7	7	7	7	7	7	7	7	10	7	7	7	7	7
11 -	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	11	5	5	5	5
12 -	4	6	6	4	6	6	6	6	6	6	6	12	4	6	4
13 -	1	6	6	1	6	6	1	6	6	1	6	6	13	6	1
14 -	10	2	8	12	8	12	10	8	2	10	8	12	12	14	10
15 -	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	15

Respostas:

- ⋆ De Paranaguá a Pato Branco, 11 pacolutos de 7 Kg custarão $11 \times 7 \times 312 =$ R\$ 24024, e demorarão 9 dias. A explicação para os 9 dias: $10 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 13 \rightarrow 6 \rightarrow 14 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 11$ (ou 9 cidades).
- ⋆ De Londrina a Irati $= 13 \times 7 \times 231 =$ R\$ 21021 e demorarão 7 dias. Aqui: $8 \rightarrow 3 \rightarrow 11 \rightarrow 5 \rightarrow 15 \rightarrow 13 \rightarrow 6$, com 7 cidades.
- ⋆ De Curitiba a Telêmaco Borba $= 20 \times 7 \times 136 =$ R\$ 19040 e demorarão 4 dias. Aqui: $4 \rightarrow 13 \rightarrow 6 \rightarrow 14$, com 4 cidades.

☞ Para você fazer

O pacoluto que você deverá transportar neste exercício é o modelo de 4 quilogramas, de acordo com a tabela de cidades

Viag	Origem	Destino	Qtd
1	14-telemaco borba	1-blumenau	29
2	2-campo mourao	11-pato branco	25
3	14-telemaco borba	2-campo mourao	26

Considere a seguinte tabela de preços já processada pelo algoritmo

0	241	181	60	214	145	46	281	213	78	225	104	57	175	74
245	0	150	305	183	114	291	40	75	323	194	73	233	37	217
95	336	0	155	33	240	141	376	308	173	44	199	83	270	67
60	181	121	0	154	85	55	221	153	32	165	44	66	115	83
62	303	41	122	0	207	108	343	275	140	11	166	50	237	34
131	96	36	191	69	0	177	136	68	209	80	66	119	30	103
56	195	135	14	168	99	0	235	167	32	179	58	11	129	28
221	67	126	281	159	90	267	0	39	299	170	49	209	13	193
273	28	178	333	211	142	319	68	0	351	222	101	261	65	245
28	212	152	31	185	116	23	252	184	0	196	75	34	146	51
51	292	30	111	63	196	97	332	264	129	0	155	39	226	23
172	137	77	232	110	41	218	177	109	250	121	0	160	71	144
45	286	226	105	259	190	91	326	258	123	270	149	0	220	17
208	66	113	268	146	77	254	106	38	286	157	36	196	0	180
28	269	209	88	242	173	74	309	241	106	253	132	85	203	0

E que deu origem à seguinte matriz de rotas

1	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
14	2	14	14	14	14	14	8	14	14	14	14	14	14	14
5	5	3	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
10	12	12	4	12	12	10	12	12	10	12	12	10	12	10
11	11	11	11	5	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
3	14	3	3	3	6	3	14	14	3	3	14	3	14	3
13	4	4	4	4	4	7	4	4	10	4	4	13	4	13
14	9	14	14	14	14	14	8	9	14	14	14	14	14	14
2	2	2	2	2	2	2	2	9	2	2	2	2	2	2
1	4	4	4	4	4	7	4	4	10	4	4	7	4	7
15	15	3	15	3	15	15	15	15	15	11	15	13	15	15
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	12	6	6	6
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	13	15	15
12	9	12	12	12	12	12	9	9	12	12	12	12	14	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	15

Ache o custo das menores rotas e envie os pacolutos por ela. Descubra também por quantas cidades esse trajeto passa e informe a demora esperada para o transporte.

	custo	dias
1	R\$	dias
2	R\$	dias
3	R\$	dias

405-76656 -