

Caminhos mínimos: algoritmo de Floyd-Warshall

Este algoritmo calcula os caminhos mínimos de todas as origens para todos os destinos em um grafo valorado. O algoritmo admite grafos com laços e são também calculados os valores de caminhos começando e terminando no mesmo vértice (usando laços ou não). A entrada para o algoritmo é a matriz K_0 , obtida a partir da matriz de custos do grafo, efetuando-se a mudança de trocar ZERO por INFINITO.

A cada passo do algoritmo, uma nova matriz $K_n (n = 1, 2, \dots)$ é calculada. A última matriz é a resposta dos caminhos mínimos.

Note que a complexidade deste algoritmo é $O(n^3)$. Porque ?

- 1: Algoritmo FLOYD-WARSHALL
2: $C[n,n] \leftarrow C$ {é a matriz de custos}
3: Gerar K , a partir de C (trocando 0 por ∞)
4: para Q de 1 até N
5: para S de 1 até N
6: para T de 1 até N
7: se $K[S,Q] + K[Q,T] < K[S,T]$
8: $K[S,T] \leftarrow K[S,Q] + K[Q,T]$
9: fim{se}
10: fim{para}
11: fim{para}
12: fim{para}
13: fim algoritmo

Note que os comandos 7,8 e 9 podem ser substituídos por

$$K[S,T] \leftarrow K[S,T] \min K[S,Q] + K[Q,T]$$

Exemplo comentado passo-a-passo

Seja o grafo com ADJ =

5	0	1
1	1	3
8	0	0

que dá origem à matriz K_0 valendo

5	∞	1
1	1	3
8	∞	∞

Para $Q = 0, S = 0$ que dá origem

$$\begin{aligned} Q[0,0] &\leftarrow Q[0,0] \text{ [} Q[0,0] + Q[0,0] \\ Q[0,1] &\leftarrow Q[0,1] \text{ [} Q[0,0] + Q[0,1] \\ Q[0,2] &\leftarrow Q[0,2] \text{ [} Q[0,0] + Q[0,2] \end{aligned}$$

Para $Q = 0, S = 1$ que dá origem

$$\begin{aligned} Q[1,0] &\leftarrow Q[1,0] \text{ [} Q[1,0] + Q[0,0] \\ Q[1,1] &\leftarrow Q[1,1] \text{ [} Q[1,0] + Q[0,1] \\ Q[1,2] &\leftarrow Q[1,2] \text{ [} Q[1,0] + Q[0,2] \end{aligned}$$

Para $Q = 0, S = 2$ que dá origem

$$\begin{aligned} Q[2,0] &\leftarrow Q[2,0] \text{ [} Q[2,0] + Q[0,0] \\ Q[2,1] &\leftarrow Q[2,1] \text{ [} Q[2,0] + Q[0,1] \\ Q[2,2] &\leftarrow Q[2,2] \text{ [} Q[2,0] + Q[0,2] \end{aligned}$$

K_1
5 ∞ 1
1 1 3
8 ∞ 9

K_2
5 ∞ 1
1 1 3
8 ∞ 9

K_3
5 ∞ 1
1 1 3
8 ∞ 9

Heurística

Para a primeira matriz, riscar a primeira linha e a primeira coluna. Valores que estão sob o risco são escritos como estão. Os demais devem ser comparados com a soma dos elementos correspondentes riscados, e o menor dos dois deve ser escrito. Para a segunda matriz riscar a segunda linha e coluna e assim por diante.

Exemplo

Seja a seguinte matriz C

8	6	0	6	0	2
0	0	5	0	4	3
0	0	0	0	1	5
0	7	3	0	3	4
1	1	0	7	0	8
4	2	0	2	0	0

que gera a seguinte K_0

8	6	∞	6	∞	2
∞	∞	5	∞	4	3
∞	∞	7	3	∞	5
∞	7	3	∞	3	4
1	1	∞	7	∞	8
4	2	∞	2	∞	∞

K_1

8	6	∞	6	∞	2
∞	∞	5	∞	4	3
∞	∞	7	3	∞	5
∞	7	3	∞	3	4
1	1	∞	7	∞	8
4	2	∞	2	∞	6

K_2

8	6	11	6	10	2
∞	∞	5	∞	4	3
∞	∞	∞	∞	1	5
∞	7	3	∞	3	4
1	1	6	7	5	3
4	2	7	2	6	5

K_3

8	6	11	6	10	2
∞	∞	5	∞	4	3
∞	∞	∞	∞	1	5
∞	7	3	∞	3	4
1	1	6	7	5	3
4	2	7	2	6	5

K_4

8	6	9	6	9	2
∞	∞	5	∞	4	3
∞	∞	∞	∞	1	5
∞	7	3	∞	3	4
1	1	6	7	5	3
4	2	5	2	5	5

K_5

8	6	9	6	9	2
5	5	5	11	4	3
2	2	7	8	1	4
4	4	3	10	3	4
1	1	6	7	5	3
4	2	5	2	5	5

K_6

6	4	7	4	7	2
5	5	5	5	4	3
2	2	7	6	1	4
4	4	3	6	3	4
1	1	6	5	5	3
4	2	5	2	5	5



Para você fazer

Dado um grafo direcionado, com lacos, através de sua matriz de adjacência usando o algoritmo Floyd/Warshall,

	1	2	3	4	5	6	7
+	-----						
1	0	0	4	0	0	3	0
2	1	0	5	0	0	0	6
3	0	0	0	6	4	0	0
4	0	0	7	0	8	0	0
5	2	8	1	0	2	2	0
6	0	5	7	1	0	0	3
7	0	3	0	0	0	0	4

ache a matriz de caminhos mínimos e responda quais os valores do

Caminho mínimo do nodo 6 ao 4	
Caminho mínimo do nodo 6 ao 6	
Caminho mínimo do nodo 3 ao 7	
Caminho mínimo do nodo 7 ao 5	
Caminho mínimo do nodo 7 ao 6	

Observação: contagens começam em 1 e não em zero. Represente ∞ por 9999 na resposta.

