

O problema do aniversário no jogo de futebol

Um problema clássico (com um resultado aparentemente inesperado) envolve a probabilidade de um dado grupo de pessoas incluir pelo menos um par de pessoas fazendo aniversário no mesmo dia. Este problema pode ser analisado usando a fórmula do complemento¹ e a regra geral de multiplicação de probabilidades². Para exemplificar, suponha que o grupo tem 3 pessoas, então a probabilidade de que haja pelo menos um par de aniversários iguais é

$$\begin{aligned} &= P(\text{ao menos um par de aniversariantes}) \\ &= 1 - P(\text{nenhum par}) \\ &= 1 - P(\text{segundo diferente do primeiro E terceiro diferente do primeiro e segundo}) \\ &= 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \text{ pela regra da multiplicação} \\ &= 1 - 0.9917958341 \\ &= 0.008204165885 \end{aligned}$$

Note que para simplificar os cálculos assumiram-se 365 dias de aniversário no ano, ignorando a data de 29 de fevereiro.

para 1 pessoa $P(1p) = 1 - \frac{365}{365} = 1 - 1 = 0$

para 2 pessoas $P(2p) = 1 - \frac{364}{365} \cdot \frac{365}{365} = 0.002739726027$

para 3 pessoas $P(3p) = 1 - \frac{363}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{365}{365} = 0.008204165885$

para 4 pessoas $P(4p) = 1 - \frac{362}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot 1 = 0.01635591247$

para 5 pessoas $P(5p) = 1 - \frac{361}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot 1 = 0.0271355737$

para 6 pessoas $P(6p) = 1 - \frac{360}{365} \cdot \frac{361}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot 1 = 0.04046248365$

Extendendo os cálculos, obtem-se

quantidade de pessoas no grupo	probabilidade de um par ao menos
1	0
2	0.002739726027
4	0.01635591247
6	0.04046248365
8	0.07433529235
10	0.1169481777
12	0.1670247888
14	0.223102512
16	0.2836040053
18	0.3469114179
20	0.4114383836
22	0.4756953077
23	0.5072972343
24	0.5383442579
26	0.5982408201
28	0.6544614723
30	0.7063162427
...	...
40	0.8912318098
...	...
50	0.9703735796
...	...
80	0.9999143319

O problema é chamado de aniversário no jogo de futebol porque a probabilidade de ocorrência de aniversário duplo ultrapassa 50% em um grupo de 23 pessoas (onze de cada time mais o juiz).

¹Se a probabilidade de x ocorrer é $P(x)$, então a probabilidade de x não ocorrer é $P(\bar{x}) = 1 - P(x)$

²Para quaisquer 2 eventos E_1 e E_2 tem-se $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$

em APL

Usando APLX, tem-se

```
x←⍳100
y←365-x
z←y÷365
w←x\z
t←1-w
t[⍳10]
0.002739726027 0.008204165885 0.01635591247 0.0271355737 0.04046248365
0.0562357031 0.07433529235 0.09462383389 0.1169481777 0.1411413783
```