

Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositalmente) obscureçam ou até invalide o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$. $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 48 Km$ e $y_1 = 37 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 91 Km$ e $y_2 = 40 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 138.24$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 85.29$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x,y	x,y
-----	-----

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 79 Km$ e $y_1 = 47 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 111 Km$ e $y_2 = 49 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 97.06$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 94.12$ segundos.

x,y	x,y
-----	-----



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositalmente) obscureçam ou até invalidem o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$. $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 54 Km$ e $y_1 = 58 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 103 Km$ e $y_2 = 57 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 129.41$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 73.53$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x,y	x,y
-----	-----

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 44 Km$ e $y_1 = 25 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 87 Km$ e $y_2 = 26 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 129.41$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 73.53$ segundos.

x,y	x,y
-----	-----



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositalmente) obscureçam ou até invalide o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$. $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 54 Km$ e $y_1 = 56 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 89 Km$ e $y_2 = 60 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 97.06$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 73.53$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x, y	x, y
--------	--------

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 67 Km$ e $y_1 = 42 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 105 Km$ e $y_2 = 40 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 102.94$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 76.47$ segundos.

x, y	x, y
--------	--------



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma sequência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma sequência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositalmente) obscureçam ou até invalide o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$. $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 67 Km$ e $y_1 = 48 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 98 Km$ e $y_2 = 51 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 100.00$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 91.18$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x,y	x,y
-----	-----

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 74 Km$ e $y_1 = 22 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 104 Km$ e $y_2 = 21 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 91.18$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 64.71$ segundos.

x,y	x,y
-----	-----



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositais) obscureçam ou até invalide o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$, $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 80 Km$ e $y_1 = 60 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 124 Km$ e $y_2 = 64 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 129.41$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 97.06$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x, y	x, y
--------	--------

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 60 Km$ e $y_1 = 23 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 104 Km$ e $y_2 = 24 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 117.65$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 76.47$ segundos.

x, y	x, y
--------	--------



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositais) obscureçam ou até invalide o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$, $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 60 Km$ e $y_1 = 25 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 104 Km$ e $y_2 = 29 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 117.65$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 82.35$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x,y	x,y
-----	-----

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 77 Km$ e $y_1 = 25 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 119 Km$ e $y_2 = 30 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 117.65$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 82.35$ segundos.

x,y	x,y
-----	-----



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositalmente) obscureçam ou até invalidem o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$. $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 50 Km$ e $y_1 = 44 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 99 Km$ e $y_2 = 41 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 132.35$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 67.65$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x,y	x,y
-----	-----

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 73 Km$ e $y_1 = 26 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 105 Km$ e $y_2 = 29 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 100.00$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 91.18$ segundos.

x,y	x,y
-----	-----



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositais) obscureçam ou até invalide o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$. $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 61 Km$ e $y_1 = 27 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 98 Km$ e $y_2 = 23 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 97.06$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 64.71$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x, y	x, y
--------	--------

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 60 Km$ e $y_1 = 50 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 103 Km$ e $y_2 = 48 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 111.76$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 100.00$ segundos.

x, y	x, y
--------	--------



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositais) obscureçam ou até invalide o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$, $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 59 Km$ e $y_1 = 36 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 107 Km$ e $y_2 = 32 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 135.29$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 97.06$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x,y	x,y
-----	-----

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 79 Km$ e $y_1 = 21 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 117 Km$ e $y_2 = 23 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 114.71$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 97.06$ segundos.

x,y	x,y
-----	-----



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma seqüência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma seqüência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositais) obscureçam ou até invalide o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$, $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 80 Km$ e $y_1 = 44 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 109 Km$ e $y_2 = 46 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 94.12$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 100.00$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x,y	x,y
-----	-----

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 71 Km$ e $y_1 = 28 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 109 Km$ e $y_2 = 26 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 114.71$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 64.71$ segundos.

x,y	x,y
-----	-----



Dia 3 de setembro de 1989 Maracanã lotado para assistir ao Brasil X Chile, pelas eliminatórias da Copa do Mundo de 90. Longe dali, em algum ponto a princípio entre Marabá e Belém, Cezar Augusto Garcez comanda um voo cego. Perdido em pleno ar, tenta se posicionar. Localiza, em vão, uma rádio que transmitia a partida que entraria para a história como “o jogo da fogueteira”. Aquele voo também estaria nos jornais no dia seguinte: “Avião desaparece na Amazônia”, publicou O Globo.

Herói e vilão, ao mesmo tempo, o comandante Garcez é a principal personagem do RG-254 que caiu na selva amazônica em 1989. O que deveria ser um voo rotineiro se transformou numa tragédia. Desorientado, Garcez permaneceu durante três horas em voo cego. Temendo que o erro fosse descoberto, passou diversas informações truncadas para a base, afirmou estar onde não estava. Sem combustível, arriscou o aparentemente impossível: um pouso na copa das árvores, em plena noite, com visibilidade praticamente nula. Garcez foi acusado de negligenciar rotinas básicas da aviação. Por outro lado, salvou a vida de muitos passageiros ao conseguir aterrissar a aeronave e cuidar dos feridos. Ainda hoje, aguarda julgamento.

A desorientação completa em voo, embora rara (todo o treinamento dos pilotos é para impedir isso), de vez em quando dá as caras. Há um episódio famoso, durante a crise dos mísseis em Cuba, em que um piloto de U2, Charles Maultsby, resolveu se perder no Polo Norte. Desorientado, acabou entrando mais de 500 Km em território da antiga União Soviética.

Teve uma sorte dos diabos, se achou e retornou, mas o dia escolhido por ele para se perder não podia ser pior: Foi dia 27 de outubro de 1962, o dia em que o mundo esteve mais próximo da IV Guerra Mundial, que seria também a última: a humanidade teria sido aniquilada. Aliás, os russos juravam que a missão do U2 era preparar a invasão dos mísseis.

GPS Na década de 70, os EUA começaram a projetar e implementar o sistema conhecido como GPS (Global Positioning System). O primeiro satélite *Navstar* foi lançado em 1978. O objetivo principal era permitir que os estimados 40.000 usuários militares americanos se orientassem sobre a terra. Os civis começaram a usar o sistema a partir da década de 80. Hoje, estima-se em mais de 50.000.000 de dispositivos capazes de receber os sinais de GPS e apresentar uma estimativa de localização.

Além do sistema americano, existe o russo *Glonass* de uso exclusivo pelos militares e a partir da última semana de 2005, o sistema *Galileo* construído e operado pela Agência Espacial Européia. Há também o chinês, chamado *Beidou*.

A grande explosão de uso, vem quando celulares e automóveis começam a vir de fábrica com a possibilidade de informar sua localização. Associados a sistemas de mapas embarcados, podem informar ao motorista qual caminho tomar para ir virtualmente a qualquer lugar sobre a superfície terrestre. Associados a telefones celulares, podem informar a localização do telefone. Associados a sistemas de proteção contra roubo de automóveis, informam a localização em tempo real e assim por diante. A lista de aplicações possíveis parece inesgotável. Seja como for surge uma tendência muito forte que é, ao cadastrar um imóvel, cadastrar também suas coordenadas geográficas.

Todos os sistemas acima se baseiam na triangulação (ou quadrangulação) do receptor em relação a 3 ou 4 (ou mais) satélites em órbita da terra.

O sistema começa pela identificação de diversos pontos fixos sobre a superfície terrestre. Tais pontos contam com estações transmissoras e permitem a cada satélite a recepção de diversos pontos. Medindo o tempo gasto por cada sinal desde a estação terrena até o satélite, e fazendo isso com diversas estações, o satélite conhece sua real posição com precisão de centímetros.

Cada satélite possui um relógio atômico, integrado à rede GPS e que garante precisão de tempo

de 1 bilionésimo de segundo.

Todos os satélites emitem 2 mensagens: A primeira, envia a identificação do satélite, sua posição no espaço e sua hora interna. Uma segunda mensagem é uma sequência de impulsos digitais em um padrão inconfundível.

Tudo funciona como se o receptor também gerasse no mesmo instante de tempo a mesma sequência de impulsos digitais. Da análise dos dois sinais (o gerado pelo satélite e o gerado internamente no receptor) é possível medir o retardo do sinal do satélite. Conhecendo a velocidade da luz (fixa e igual a 299.792.458 m/seg) e conhecendo o tempo gasto pelo sinal do satélite ao receptor, é possível estabelecer a distância entre satélite e receptor.

Daqui, pode-se inferir que o receptor está sobre a esfera de centro x, y, z (as coordenadas no espaço do satélite) e de raio R , que é a distância entre o receptor e o satélite.

Ao fazer o mesmo cálculo com um segundo satélite, obtém-se uma segunda esfera, e o receptor está sobre o círculo de interseção das duas esferas.

Finalmente ao fazer o cálculo com um terceiro satélite, obtém-se uma terceira esfera. O receptor ainda pertence às 3 esferas, e a interseção das 3 apresenta apenas 2 pontos no espaço. Um deles apenas sobre a superfície terrestre, e logo esta é a posição do receptor, com precisão de metros.

Problemas Se os receptores pudessem ter um relógio atômico 3 satélites bastariam. Como um relógio atômico é muito caro e pesado, os receptores usam relógios de quartzo comum (sujeitos a erros de 1 seg/dia).

Então usa-se um quarto satélite para refazer os cálculos e permitir acertar o atraso/adiantamento do relógio local ao relógio da rede.

Se o usuário estiver em movimento, os sinais ainda vêm afetados pelo efeito Doppler, que precisa ser analiticamente corrigido antes de estabelecer a posição do receptor. Idem para os efeitos relativísticos associados.

O sistema americano usa duas radio-freqüências: L1 e L2. A L1 é chamada Sinal Civil, embora os militares também a usem. A L2 é de uso exclusivo militar, já que seus códigos (a segunda parte das mensagens) não são públicos e são protegidos por criptografia. Ao usar apenas o sinal L1, receptores conseguem determinar sua posição com erros de 5 a 10 m, causados pela ação da ionosfera. A camada de ar sobre a terra aumenta a densidade da atmosfera, causando refração nos sinais. É como um lápis colocado dentro de um copo de água.

A potência de um satélite é de 500W, o equivalente a 5 lâmpadas de 100W. Apenas para efeito de comparação, o sinal de TV de um satélite é 1 bilhão de vezes mais forte. Este fato permite que interferências (às vezes propositalmente) obscureçam ou até invalidem o sinal dos satélites. Este fato é usado em teatros de guerra, quando as forças americanas introduzem geradores locais de ruído centrados na banda usada pelo sistema. Essa é a razão pela qual embora o sistema seja público, russos e europeus tratam de ter cada um o seu.

Dois amigos

Vamos simular o cálculo de uma posição desconhecida usando triangulação, mas vamos trabalhar apenas em 2D, que ninguém aqui está a fim de enlouquecer por causa da geometria analítica. :-)

Suponhamos uma região plana, na qual dois pontos tem coordenadas conhecidas. Você vai colocar 2 amigos, um em cada ponto, todos munidos de relógios precisos.

Você combinou que às 14h00, um dos seus amigos dará um tiro de canhão. Nessa mesma hora, você ligará um cronômetro. Alguns segundos ou minutos depois, você ouvirá o tiro e desligará o cronômetro, obtendo um tempo gasto pelo barulho para percorrer a distância entre o seu primeiro amigo e você. Vamos chamar esta distância de D_1 .

Lembrando que o som se propaga a 0.340 Km/seg, você conseguirá uma medida confiável entre você e seu amigo 1.

O procedimento será repetido às 14h15 com seu amigo número 2. Pelo mesmo mecanismo você obterá a distância entre você e seu amigo 2. Será a distância D_2 .

Sabendo que seu amigo 1, se encontra no centro de uma circunferência de raio D_1 e coordenadas

do centro iguais a x_1, y_1 , e seu amigo 2 se encontra em x_2, y_2 , também no centro de uma circunferência de raio D_2 , e que você se encontra sobre as duas circunferências, pede-se que você calcule a sua posição.

Obs: se você não tiver muita intimidade com a geometria analítica, um bom método é o gráfico. Use um papel milimetrado, disponha os dois pontos, trace duas circunferências de raios D_1 e D_2 e nos encontros das duas circunferências você estará.

Obs:

* Este procedimento também pode ser usado para verificar o acerto/erro das contas e a verificação final do ponto.

* Como só usaremos 2 amigos (ao invés de 3), haverá 2 pontos candidatos, ambos na superfície da terra. Responda os 2.

* Um terceiro amigo eliminaria a ambigüidade.

Exemplo Seja um caso em que $x_1 = 77Km$, $y_1 = 40Km$. $x_2 = 120Km$, $y_2 = 38Km$. Os tempos são: $t_1 = 135.29seg$ e $t_2 = 100.00seg$.

Obtem-se $d_1 = 46Km$ e $d_2 = 34Km$. A fórmula da circunferência 1 é $x^2 + y^2 - 154x - 80y + 5413 = 0$

A fórmula da circunferência 2 é $x^2 + y^2 - 240x - 76y + 14688 = 0$

Subtraindo uma equação da outra, fica-se com $86x - 4y - 9275 = 0$ e $y = 21.5x - 2318.75$.

Substituindo o y obtido em qualquer uma das equações, chega-se ao valor correto do observador que é $x_o = 111Km$, $y_o = 71Km$, ou o outro valor possível que é $x_o = 108Km$, $y_o = 6Km$.

Para você fazer

Dados:

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 64 Km$ e $y_1 = 30 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 109 Km$ e $y_2 = 35 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 144.12$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 102.94$ segundos.

Como fazer

Para entender o funcionamento do sistema, é necessário relembrar um pouco de física e de geometria analítica.

Da física: distância = velocidade \times tempo. Sabendo que a velocidade do som é 0.340 Km/seg, obtém-se as duas distâncias.

Da geometria analítica, uma circunferência no plano é perfeitamente determinada se soubermos as coordenadas α, β do seu centro, bem como o raio dele, usualmente representada por R . Da geometria analítica, e do Teorema de Pitágoras, a fórmula é

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

Do problema, são conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, D_1$ e D_2 . Obtem-se agora duas fórmulas em x^2, x, y^2 e y . Operando com elas obtém-se dois pares de x, y que são os pontos candidatos. Os dois pontos candidatos a serem sua localização são:

x,y	x,y
-----	-----

Mais Um

* Seu amigo 1 está em $x_1 = 53 Km$ e $y_1 = 58 Km$.

* Seu amigo 2 está em $x_2 = 94 Km$ e $y_2 = 61 Km$.

* O tiro do amigo 1 demorou $t_1 = 114.71$ segundos. O tiro do amigo 2 demorou $t_2 = 91.18$ segundos.

x,y	x,y
-----	-----

