Logaritmos

Números

Definem-se, e trabalha-se com os seguintes conjuntos de números:

Naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Inteiros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Racionais $\mathbb{Q} = \{$Conjunto das frações a/b, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*\}$.

Reais $\mathbb{R} = \{$Conjunto dos racionais mais as decimais não exatas e não periódicas, chamados números irracionais$\}$.

Complexos $\mathbb{C} = \{$Números na forma $a + b.i$, onde a e $b \in \mathbb{R}$ e i é $\sqrt{-1}\}$.

Para todos os conjuntos $\mathbb{X}$ acima, valem os seguintes sub-conjuntos: $\mathbb{X}^*$ é o conjunto $\mathbb{X}$ sem o zero. $\mathbb{X}_+$ é o conjunto dos positivos de $\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}_-$ é o conjunto dos negativos de $\mathbb{X}$.
É óbvio que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Potência

Seja a um real e n um natural. A potência de a ao expoente n, denotada a^n, é o número real:

- $a^0 = 1$
- $a^n = a^{n-1} \times a, \forall\, n, n \geq 1$

Uma definição que permite extender o conjunto $\mathbb{N}$ dos expoentes em direção ao $\mathbb{Z}$ é:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Generalizando, podem-se escrever as seguintes propriedades:
1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$; 2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a^n \neq 0$; 3. $(a.b)^n = a^n.b^n$; 4. $(a/b)^n = a^n/b^n, b^n \neq 0$; 5. $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Exemplos

$3^0 = 1$	$(-2)^0 = 1$
$5^1 = 5$	$3^2 = 3.3 = 9$
$(1/7)^1 = 1/7$	$(-2)^3 = -2. - 2. - 2 = -8$
$(-2)^2 = -2. - 2 = 4$	$2^2 = 2.2 = 4$
$(2/3)^4 = 16/81$	$0^3 = 0.0.0 = 0$
$0^0 = 1$	$0^1 = 0$

Para você fazer

Calcule os 3 exercícios abaixo e responda no local correto:

a. $x = (0,1)^{-2}$ b. $x = \frac{1}{2^{-3}}$
c. $9^x + 3^x = 90$

Raiz

A raiz n-ésima r de a, denotada $r = \sqrt[n]{a}$ é o número r que elevado a n gera a. Em outras palavras, tem-se:

$$\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a$$

Originalmente, a raiz aritmética é definida apenas para $a \in \mathbb{R}$ e $a \geq 0$, além de $n \in \mathbb{N}$, mas com as convenientes generalizações, valem aqui as seguintes propriedades: Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos: 1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$; 2. $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; 3. $\sqrt[n]{a/b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, (b \neq 0)$; 4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;
5. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p.n]{a}$;

Exemplos

$2.\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{3.2^3} = \sqrt[3]{24}$	$-5.\sqrt{2} = -\sqrt{2.5^2} = -\sqrt{50}$
$-2.\sqrt[4]{2} = -\sqrt[4]{2.2^4} = -\sqrt[4]{32}$	$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

Para você fazer

Calcule os 3 exercícios abaixo e responda abaixo d. $x = \sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{18}$
e. $x = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}$
f. $x = 9^{\sqrt{2}} \div 3^{\sqrt{8}}$

Logaritmos

O logaritmo n de a na base r, denotado por $n = \log_r a$ é o expoente ao qual se deve elevar a base r para obter a. Em outras palavras, tem-se:

$$\log_r a = n \Leftrightarrow r^n = a$$

Note a similaridade da expressão do logaritmo com a da raiz, o que nos permite montar a seguinte equivalência:

$$\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a \Leftrightarrow \log_r a = n$$

O conceito de logaritmo foi muito importante na história da matemática desde a sua proposição original por Napier em 1614, pois ele simplificava muito os cálculos ao permitir converter potências em multiplicações e estas em somas[1]. Na informática, (no tópico complexidade computacional) os logaritmos são fundamentais porque descrevem o comportamento de uma classe importante de algoritmos. Em particular, são muito usados os logaritmos de base binária. Relembrando as potências de dois:

n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	2^n
$log_2 n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	n

n	512	1024	2048	4096	8192	16384	2^n
$log_2 n$	9	10	11	12	13	14	n

Exemplos

1. Suponha que eu contrate José para carregar caixas, oferecendo-lhe n reais pelo transporte de n caixas. Também contrato João, oferecendo-lhe $\log_2 m$ dólares pelo transporte de m caixas. Quem será mais bem remunerado ? Em que condições ?
Mais exemplos
2. Quanto é $\log_2 \frac{1}{8}$? 3. Quanto é $\log_{0,25} 32$?
Mais exemplos
$\log_2 1024 = 10$ $\log_4 16 = 2$ $\log_2 10 = 3,32$

Para você fazer

Calcule os 3 exercícios abaixo:
g. $x = \log_3 \frac{1}{9}$
h. $x = \log_{\frac{1}{2}} 8$
i. $x = \log_7 \frac{1}{7}$

De novo, calcule os 3 exercícios abaixo:

j. $x = 2^{1+\log_2 5}$
k. $\log_2{(x - 3)} + \log_2{(x + 3)} = 4$
l. $(\log_{10}{(2x - 5)}) = 0$

Respostas

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l

[2]

- 1 - /

[1] a regra básica aqui é a seguinte: para obter o produto $m.n$, obtem-se o $\log m$ e o $\log n$, soma-se-os e obtem-se o antilogaritmo da soma.

[2] Quando ao lado do exercício aparecerem as siglas SRP ou SRI, o significado delas é
SRP = somente o resultado positivo
SRI = somente o resultado inteiro
Se estas letras não aparecerem, desconsidere esta nota