

Demonstração automática de teoremas

Como se viu a Lógica permite uma descrição bastante precisa do mundo ou pelo menos de um mundo em particular. O tema de estudo agora é como usar a lógica para recuperar e produzir conhecimento novo sobre este mundo.

Vai-se pegar alguns conceitos emprestados da matemática. As premissas iniciais sobre o mundo vão receber o nome de axiomas. Este nome será usado tanto para fatos como para regras, desde que ambos sejam dados.

A partir deles, ou baseado neles, vão ser feitas perguntas, que poderão ser respondidas como SIM ou NÃO. Tais perguntas vão receber o nome de TEOREMAS e vai-se estudar aqui o processo pelo qual a Lógica nos habilita a demonstrar um teorema. O significado disto é afirmar, ao final, que o teorema é válido ou seja que a resposta à pergunta que ele faz é SIM.

Este exercício está preparando o caminho para o estudo da linguagem PROLOG, já que esta faz exatamente a mesma coisa que este exercício, só que de maneira automática.

Grosso modo, o processo sempre é o mesmo e composto das seguintes etapas:

preparação

- 1. Reescrever as informações contidas no enunciado na forma de Lógica de Predicados. Utilizar apenas cláusulas de Horn (apenas uma cláusula após a implicação).
- 2. Eliminar $\rightarrow$, trocando-a por $\sim A \vee B$.
- 3. Reduzir o escopo de $\sim$, usando
 - (a) $\sim \sim A$ equivale a A
 - (b) $\sim (A \wedge B)$ equivale a $\sim A \vee \sim B$
 - (c) $\sim \forall x P(x)$ equivale a $\sim P(x)$
 - (d) $\sim \exists x P(x)$ equivale a $\forall x \sim P(x)$
- 4. Renomear as variáveis e passar os quantificadores para a esquerda
- 5. Retirar os quantificadores
- 6. Transformar as expressões em conjunção de disjuntos

demonstração

- 1. Acrescentar o que se quer provar NEGADO.
- 2. Localizar pares de afirmações contraditórias.
- 3. Se for possível efetuar substituições de modo que as afirmações contraditórias se refiram ao mesmo objeto, substituí-las e criar um novo teorema, onde as afirmações contraditórias são cortadas (simplificadas)
- 4. Prosseguir nesse ciclo até obter a cláusula NIHIL. Se isto foi possível o teorema original está demonstrado.
- 5. Se não for possível, não é possível demonstrar o teorema original.

A propósito vai-se estabelecer uma regra de escrita que será bem útil no PROLOG: variáveis serão escritas em maiúsculo e constantes em minúsculo.

Exemplo simples Seja o seguinte exemplo simples e manjado: *Todo homem é mortal. Sócrates é homem.* É possível afirmar que Sócrates é mortal ?

- 1. Transformando em predicados
 - 1. $\forall X, homem(X) \rightarrow mortal(X)$
 - 2. $homem(s)$.
- 2. Transformando o axioma 1, e já extraindo o quantificador $\forall$
 - 1. $\sim homem(X) \vee mortal(X)$.
- 3. Incluir a dúvida, negada
 - 3. $\sim mortal(s)$.
- 4. Os três axiomas agora são:
 - 1. $\sim homem(X) \vee mortal(X)$
 - 2. $homem(s)$
 - 3. $\sim mortal(s)$.
- 5. Examinando os axiomas verifica-se que substituindo X/s em 1 e juntando com 3, tem-se: $\sim homem(s) \vee mortal(s) \oplus \sim mortal(s)$
- 6. A existência de a e $\sim a$ permite a simplificação e o teorema 4 é
 - 4. $\sim homem(s)$.
- 7. Examinando agora o teorema 4 e o axioma 2, tem-se $homem(s) \oplus \sim homem(s)$.
- 8. Desta simplificação não resta nada, ou melhor, resta NIHIL
- 9. Então está provado o teorema original *Sócrates é mortal.*

Mais um *Todo careca é feliz. Todo feliz é gordo. Zé é careca ou Zé está doente. Zé está são. Pode-se afirmar que Zé é gordo ?*

$\forall X, careca(X) \rightarrow feliz(X)$
 $\forall Y, feliz(Y) \rightarrow gordo(Y)$
 $careca(z) \vee doente(z)$
 $sao(z)$
Faltou usar uma informação do senso comum
 $sao(K) \rightarrow \sim doente(K)$
Incluindo a fórmula negada,
 $\sim gordo(z)$
Bem resumido, e já devidamente operado:
1. $\sim careca(X) \vee feliz(X)$
2. $\sim feliz(Y) \vee gordo(Y)$
3. $\sim sao(K) \vee \sim doente(K)$
4. $careca(z) \vee doente(z)$
5. $sao(z)$
6. $\sim gordo(z)$
Substituindo Y/z e juntando 2 e 6, fica
7. $\sim feliz(z)$
Substituindo X/z e juntando 1 e 7, fica:
8. $\sim careca(z)$
Juntando 8 e 4 (sem substituição), fica
9. $doente(z)$
Juntando 3 e 9, fica
10. $\sim sao(z)$
Juntando 10 e 5, fica
11. NIHIL
Está provada a afirmação de que Zé é gordo.

🔗 Para você fazer

A seguir, 10 textos em português, cada um deles com uma pergunta ao final. Responda 1 se a resposta for SIM e 0 se a resposta for não. Para seu governo a probabilidade da resposta ser sim é de 50 %. Idem para ser não.

- 1. quem determina as regras, tem que estudar muito/quem compra muita roupa, precisa viajar muito/mario não tem que estudar muito/mario não compra muita roupa/é possível provar que mario determina as regras ?
- 2. benedito estabelece a pena e benedito é corrupto/quem estabelece a pena, precisa ser justo/quem é corrupto, rouba a sociedade/é possível provar que benedito precisa ser justo ou benedito rouba a sociedade ?
- 3. quem torce pelo Brasil, tem tido muito desgosto/quem come chucrute, tem bom gosto/barbosa não tem tido muito desgosto/barbosa não come chucrute/é possível provar que barbosa torce pelo Brasil ?
- 4. quem gosta de programar, se sente uma máquina/quem come muito chocolate, tem problemas de cintura/pedro come muito chocolate ou gosta de programar/pedro não come muito chocolate/é possível provar que pedro se sente uma máquina ?
- 5. quem gosta de matemática, sabe o que é bom/quem sabe o que é bom, rejeita crendices/marcelo não sabe o que é bom/é possível provar que marcelo não rejeita crendices ?
- 6. quem ouve Beethoven, sabe o que é bom/quem sabe o que é bom, rejeita música caipira/marcelo não rejeita música caipira/é possível provar que marcelo não ouve Beethoven ?
- 7. quem ouve Beethoven, sabe o que é bom/quem usa o telefone, faz amigos/paulo não sabe o que é bom/paulo não usa o telefone/é possível provar que paulo nao ouve Beethoven ?
- 8. quem usa o telefone, faz amigos/quem faz amigos, visita lugares/marcelo não faz amigos/é possível provar que marcelo não visita lugares ?
- 9. quem come jujuba, usa roupa vermelha/quem ouve Beethoven, sabe o que é bom/ barbosa não usa roupa vermelha/barbosa não ouve Beethoven/é possível provar que barbosa come jujuba ?
- 10. deodoro gosta de programar e deodoro vai na praça Osório/quem gosta de programar, se sente uma máquina/quem vai na praça Osório, enxerga um belo chafariz/é possível provar que deodoro se sente uma máquina ou deodoro enxerga um belo chafariz ?

Não esqueça: 1 na resposta significa SIM e para responder NÃO, escreva 0.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

