## Análise Combinatória

Começa-se descrevendo o *Princípio Fundamental da Contagem:* Se um certo evento pode ocorrer de $n_1$ maneiras diferentes e depois dele um segundo evento pode ocorrer de $n_2$ maneiras e depois um terceiro de $n_3$, e assim por diante então o número de maneiras em que os eventos podem ocorrer na ordem indicada é $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots$.

## Permutação

Qualquer agrupamento de um conjunto de $n$ objetos numa dada ordem é denominado permutação dos objetos tomados todos de uma vez.

Se os objetos forem tomados em menor número, digamos $r$ (onde $r \leq n$) esta retirada é chamada arranjo de $n$ objetos tomados $r$ a $r$.

Veja-se um exemplo: dados 4 números 1,2,3 e 4:

1. 1234, 4321, 3214, ... , são permutações dos 4 números
2. 124, 321, 431, ... , são arranjos dos 4 números tomados 3 a 3
3. 12, 34, 42, 41, ... , são arranjos dos 4 objetos tomados 2 a 2

O número dos arranjos de $n$ objetos tomados $r$ a $r$ é indicado por $A(n,r)$. Para obter essa quantidade, vai-se fazer um raciocínio. O primeiro elemento do arranjo pode ser escolhido entre $n$ possibilidades. O segundo, entre $n-1$ possibilidades (porque o primeiro já foi escolhido). O terceiro entre $n-2$ possibilidades (porque o primeiro e o segundo já estão escolhidos). Pelo princípio fundamental da contagem tem-se $A(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ e daqui

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Na definição viu-se que $r \leq n$. No caso particular em que $r = n$, o arranjo se transforma em uma permutação e a fórmula se transforma em

$$A(n,n) = P(n) = n!$$

## Permutações com repetição

Quando alguns objetos são iguais entre si, a fórmula acima de permutações gera um resultado superior ao real. Por exemplo, se quisermos saber quantas combinações podem-se fazer com 5 bolas das quais 3 são vermelhas, 1 branca e 1 azul, embora estejamos diante de 5 bolas, algumas permutações serão repetidas. Chamando as bolas de $v_1$, $v_2$, $v_3$, $b$ e $a$, claramente a combinação $v_1, v_2, v_3, b, a$ é exatamente igual à combinação $v_3, v_2, v_1, b, a$.

Para descobrir quantas permutações distintas existem em um conjunto com $n$ objetos, dos quais $n_1$ são iguais entre si, outros $n_2$ objetos são iguais entre si, e assim por diante, a equação correta é

$$P(n)_{c/rep} = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots}$$

Por exemplo, vamos descobrir quantas palavras distintas podem ser escritas usando as letras de `MANGA`. Como se pode ver, há 5 letras, mas destas 2 são repetidas. A resposta portanto é $\frac{5!}{2!} = 120/2 = 60$.

## Amostras ordenadas

Muitos problemas em combinatória estão relacionados com a retirada de um objeto de uma coleção (bola de uma urna, carta de um baralho, pessoa de uma população...). Sempre aqui há dois casos

**retirada com reposição** O objeto é retornado à coleção antes de fazer a próxima retirada. Como existem $n$ modos distintos de fazer cada retirada pelo princípio fundamental da contagem existem $n \times n \times \ldots = n^r$ maneiras de fazer $r$ retiradas em um universo com $n$ objetos.

**retirada sem reposição** Neste caso o objeto não é retornado ao universo. Portanto esta contagem é um simples arranjo dos objetos do universo. Portanto existem $\frac{n!}{(n-r)!}$ diferentes amostras ordenadas de tamanho $r$ sem reposição em uma população de $n$ objetos.

## Combinações

Considere-se uma coleção de $n$ objetos. Uma combinação desses $n$ elementos tomados $r$ a $r$ é uma seleção qualquer dos $r$ objetos em que a ordem não interessa. Ou seja, a combinação de $n$, $r$ a $r$ é qualquer subconjunto com $r$ elementos.

Por exemplo, as combinações dos números 1234 tomados 3 a 3 são $\{123\}$, $\{124\}$, $\{134\}$, $\{234\}$ ou simplesmente 123, 124, 134, 234. Observa-se que as combinações 123 132, 213, 231, 312 e 321 são iguais e cada uma delas indica o mesmo conjunto.

O número de combinações de $n$ objetos tomados $r$ a $r$ é representado por $C(n,r)$ e é dado por

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{A(n,r)}{r!}$$

Lembrando da definição do coeficiente binomial $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$ pode-se escrever que

$$C(n,r) = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$$

## Partições

Recordando, uma partição de um conjunto $X$ é uma subdivisão de $X$ em subconjuntos que são disjuntos e cuja reunião é $X$, de modo que qualquer $a \in X$ pertence a um e somente um dos subconjuntos.

Supondo que $[A_1, A_2, \ldots, A_r]$ e $[B_1, B_2, \ldots, B_s]$ sejam partições do mesmo conjunto $X$. Então a classe das intersecções $[A_i \cap B_j]$ é uma nova partição de $X$ denominada partição cruzada.

Seja por exemplo $X$ o conjunto de alunos de sistemas de informação da UP. Uma partição poderia ser $[P, S, T, Q]$ representando alunos do Primeiro, Segundo, Terceiro e Quarto anos do curso. Uma segunda partição de $X$ poderia ser $[H, M]$ representando alunos Homens e Mulheres. Neste caso, a partição cruzada é
$M \cap P$ mulheres que estão no primeiro ano
$M \cap S$ mulheres que estão no segundo ano
$M \cap T$ mulheres que estão no terceiro ano
$M \cap Q$ mulheres que estão no quarto ano
$H \cap P$ homens que estão no primeiro ano
$H \cap S$ homens que estão no segundo ano
$H \cap T$ homens que estão no terceiro ano
$H \cap Q$ homens que estão no quarto ano

## Partição Ordenada

Suponha o conjunto $A$ contendo $n$ elementos. e sejam $n_1$, $n_2$ ..., $n_r$ inteiros positivos com $n = n_1 + n_2 +, \ldots, n_r$. Então existem

$$\begin{pmatrix} n \\ n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n-n_1-n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

$$\ldots \begin{pmatrix} n-n_1-n_2-\ldots-n_{r-1} \\ n_r \end{pmatrix}$$

diferentes partições ordenadas de $A$ da forma $(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ onde $A_1$ contém $n_1$ elementos, $A_2$ contém $n_2$, ..., e $A_r$ contém $n_r$ elementos.

Daqui, seja $A$ contendo $n$ elementos e seja $n_1, n_2, \ldots n_r$ inteiros tais que $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ então existem

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$$

diferentes partições ordenadas de $A$ da forma $(A_1, A_2, \ldots A_r)$ onde $A_1$ tem $n_1$ elementos ... e $A_r$ tem $n_r$ elementos.

Por exemplo, de quantas maneiras 9 bonecas podem ser distribuídas entre 4 meninas se a menina mais jovem deve receber 3 bonecas e cada uma das outras 3 meninas devem receber 2 bonecas cada ? Neste caso, quer se achar o número de partições ordenadas das 9 bonecas e 4 células contendo 3, 2, 2 e 2 bonecas. Daqui existem $\frac{9!}{3!2!2!2!} = 2520$ partições ordenadas.

## Diagrama de Árvore

É um dispositivo prático para enumerar todas as possibilidades de uma sequência de eventos, onde cada um deles pode ocorrer em um número finito de casos. Por exemplo, seja calcular o produto cartesiano $A \times B \times C$, onde $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$ e $C = \{3, 4\}$.

Mais um exemplo: João e Maria disputam um torneio de búrico. O primeiro deles que ganhar 2 jogos seguidos ou que ganhar um total de 3 jogos ganha o torneio. Como as partidas podem se desenvolver ?

## ☞ Para você fazer

1. Uma bolsa contém 6 bolas brancas e 5 pretas. De quantas maneiras se pode tirar 4 bolas, sendo que as 4 podem ser de qualquer cor ?
2. Considerando 4 vogais (a incluído) e 8 consoantes (b incluído), quantas palavras de 5 letras contendo 2 vogais diferentes e 3 consoantes diferentes podem ser formadas, sendo que a palavra começa por a e contém b ?
3. Se se permitem repetições, quantos números de 3 algarismos múltiplos de 5 podem ser formados a partir de 2, 3, 5, 6, 7 e 9?
4. Alguém recebe uma mão de poker (5 cartas) retiradas de um baralho comum. De quantas maneiras pode receber um "flush" de espadas ?
5. Quantas palavras de 4 letras podem ser formadas com as letras de CRISTAL sendo que a primeira é T e S está presente ?
6. Quantas palavras de 4 letras podem ser formadas com as letras de CRISTAL ?
7. Dado $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Os conjuntos $[\{a, b, c\}, \{c, d, e\}, \{f, g\}]$ constituem uma partição de $X$ ?
8. Quantas permutações distintas podem ser formadas com as letras da palavra ISSO ?
9. Se não se permitem repetições, quantos números de 3 algarismos menores que 400 podem ser formados a partir de 2, 3, 5, 6, 7 e 9?
10. Existem 12 pontos: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L. Todos estão no plano e não há 3 deles alinhados. Quantas das retas distintas passam por A ?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |