Números primos

Os números primos têm sido estudados extensivamente ao longo do tempo, começando com os gregos. O conceito de primo tem a ver com divisibilidade, como números naturais são divididos uns pelos outros. Diz-se que um natural n é divisível por outro natural m, se a divisão (inteira) de $n \div m$ deixa resto 0, e é também um número natural.

Define-se também um número par quando ele é divisível por 2 e impar se não é divisível por 2.

Ex 1: Escreva SIM se o primeiro número do par é divisível pelo segundo e NÃO senão

1-(123,7)
2-(144,16)
3-(88,9)
4-(122,11)
5-(69,13)

Se o natural a é divisível pelo natural b, então b é um fator ou um divisor de a, e a é um múltiplo de b. Por exemplo, 5 é um fator de 30 e 30 é um múltiplo de 5. 6 também é um fator de 30 e portanto 30 é múltiplo de 6 também. O produto 5×6 é chamado fatorização de 30. Outras fatorizações de 30 incluem 1×30, 2×15.

Ex2: Ache todos os fatores de

6-140
7-98
8-60

Um detalhe interessante, é que os fatores de um dado natural sempre vêm aos pares, sendo que sempre elementos equidistantes do centro multiplicados reproduzem o número original. Por exemplo, os fatores de 38 são: 1 2 19 38, e os fatores de 36 são: 1 2 3 4 6 9 12 18 36. A exceção a esta regra é quando o natural é um quadrado perfeito, quando o número central deve ser tomado duas vezes. Por exemplo, os divisores de 64 são: 1 2 4 8 16 32 64, e para a regra acima ser verdadeira, eles deveriam ser: 1 2 4 8 **8** 16 32 64.

Um natural maior do que 1 que tem somente 2 fatores: a unidade e ele próprio é chamado **primo**. Um natural maior do que 1 que não é primo, é chamado **composto**. Para simplificar regras e conceitos os matemáticos concordam que 1 não é nem primo nem composto. Para evitar esta dificuldade, pode-se definir um primo como um natural que tem apenas 2 divisores *diferentes*. Os pitagóricos achavam que 1 não era primo porque eles achavam que a unidade era a geradora de todos os demais números. Vale lembrar que o único primo par é o 2.

Lá no ensino fundamental, nós estudamos as regras de divisibilidade. Vale a pena recordá-las:

divisivel por	teste	exemplo
2	o último digito é par	876534 é par, pois 4 é par
3	a soma dos dígitos é divisível por 3	123 é divisível por 3 pois 1+2+3=6, e 6 é divisível por 3
4	os últimos 2 dígitos são divisíveis por 4	8932 é divisível por 4, pois 32 o é
5	o número termina por 0 ou 5	1005 é divisível por 5
6	o número é divisível por 2 e por 3	27342 é divisível por 2 e por 3, logo por 6
8	os últimos 3 dígitos formam um número divisível por 8	9816 é, pois 816 é divisível por 8
9	a soma dos dígitos é divisível por 9	428376105 é divisível, pois a soma dos dígitos é 36
10	o último dígito é 0	100 é divisível por 10
12	o número é divisível por 3 e por 4	144 é divisível

As regras de 7 e 11 são um bocado complicadas é melhor deixá-las de lado.

O teorema fundamental da aritmética diz que qualquer natural composto tem uma (e apenas uma) representação de produtos de números primos (desprezando-se a ordem dos fatores). Para achar estes fatores, a regra é simples: divida o número original pela sequência de primos, tantas vezes quanto possível, enquanto a resposta for um número composto. Por exemplo, para achar a fatorização de 504, dividimos por 2, a resposta dá 252, de novo dividimos por 2 (126) e de novo (63). Agora divide-se por 3 (21) e de novo (7). Como 7 não é mais composto, a fatorização completa é $504 = 2.2.2.3.3.7$

Ex3: Indique a fatorização em primos de

9-251
10-2556
11-885

Existe um teorema que diz que o conjunto dos primos é infinito. Há uma demostração linda, devida a Euclides. O tipo de raciocínio aqui desenvolvido é muitas vezes usado em programação de computadores, então embora demonstração de teoremas seja uma coisa meio *démodée*, vamos a ela.

A demonstração começa suponto o CONTRÁRIO do que se quer provar. Então suponha-se que o conjunto é finito. Se o é, existe um primo que é o maior de todos, chame-mo-lo de P. Agora, vamos montar o número M que é o produto de todos os primos, a saber: $M = (p_1 \times p_2 \times p_3 \times \ldots \times P) + 1$. p_1 é o primeiro primo (2), p_2 o segundo (3) e assim por diante até P que é o último primo.

Agora, M é primo ou composto, vejamos:

primo M é obviamente maior do que P, então se M é primo ele é maior do que P e achamos uma contradição à hipótese original (P é o maior primo que existe).

composto Se M é composto, ele deve ter um fator primo. Mas nenhum dos primos $p_1, p_2, \ldots, P$ é fator, já que eles deixam um resto 1 quando dividem M. Então se M tem um fator primo, ele deve ser maior do P, mas isto também é uma contradição a que P seja o maior primo.

Em qualquer caso achou-se uma contradição, o que garante que NÃO existe o maior primo e portanto o conjunto dos primos tem infinitos elementos.

MMC e MDC

Uma importante aplicação de números primos é achar o **mínimo múltiplo comum** e o **máximo divisor comum** de um conjunto de números naturais. O máximo divisor comum de vários números é o MAIOR inteiro que divide simultaneamente a todos os números originais. Por exemplo, 18 é o MDC de 36 e de 54, já que ele é o maior número que divide 36 e 54 sem deixar resto. Igualmente, 1 é o MDC de 7 e 18. O MDC é achado usando a fatoração de primos. No exemplo acima, ve-se que $36 = 2^2 \times 3^2$ e $54 = 2^1 \times 3^3$. Para achar o MDC forme o produto com fatores comuns às duas listas e com cada fator tendo o menor dos dois expoentes. Com isso, o MDC de 36 e 54 é $2^1 \times 3^2 = 2 \times 9 = 18$.

Um segundo método para achar o MDC é:

1. Escreva todos os números em uma linha
2. Divida-os todos por um fator primo comum. Comece com 2, depois 3, 5 e assim por diante.
3. Pare quando não houver mais fator comum (que divida TODOS os números)
4. O produto dos primos fatores comuns é o MDC

Por exemplo, achar o MDC de 12, 18 e 60.

```
12   18   60   |  2
 6    9   30   |  3
 2    3   10   |  acabou, logo o MDC é 2.3=6
```

Muitas vezes é necessário calcular o Mínimo Múltiplo Comum, que é o menor número que quando dividido por todos os números do conjunto não deixa resto.

Ele é necessário sempre que se deseja somar duas frações, por exemplo $\frac{2}{15} + \frac{1}{10}$. Os números 10 e 15 precisam ser substituídos por um número que seja divisível por 10 e por 15 ao mesmo tempo.

Para achar este número, primeiro liste os múltiplos de 10: $\{10, 20, 30, 40, \ldots\}$ e depois os múltiplos de 15: $\{15, 30, 45, 60, \ldots\}$. O conjuntos dos números que são múltiplos de ambos são $\{30, 60, 90, \ldots, \}$. O menor destes números (o 30) é chamado mínimo múltiplo comum ou MMC de 10 e 15. Para calcular o MMC, faça:

1. Escreva a fatoração em primos de cada número
2. Escolha todos os primos que aparecem em qualquer fatoração, usando o maior expoente
3. O produto dos fatores acima é o MMC

Por exemplo, para achar o MMC(72,150) temos $72 = 2^3 \times 3^2$ e $150 = 2 \times 3 \times 5^2$. O MMC é $2^3 \times 3^3 \times 5^2 = 1800$

Para 2 números a e b, vale a regra: $a \times b = mdc(a, b) \times mmc(a, b)$

Ex4: Ache o mmc e o mdc dos pares

12-450,66
13-125,126
14-144,1500

Sequências

A seguir vamos examinar algumas sequências de números. Uma lista de números que tem o primeiro número, o segundo, o terceiro e assim por diante é chamada sequência. Os números são chamados de termos da sequencia.
Eis alguns exemplos:

positivos inteiros pares $2, 4, 6, 8, \ldots$

múltiplos de 5 $5, 10, 15, 20, \ldots$

potências de 2 $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

divisões em régua $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

pagamentos periódicos Imagine um empréstimo bancário de R$ 500,00 sem juros. Imagine a sequência do saldo devedor: $500, 490, 480, \ldots, 20, 10, 0$ A sequência termina quando 0 é encontrado.

Aqui vão ser estudadas as sequências aritméticas e geométricas. Antes disso, vamos rever algumas regras básicas, com exemplos.

- Na soma de dois números com mesmo sinal, a soma terá o mesmo sinal, e o valor é a soma do valor absoluto dos termos.
- Na soma de dois números de sinais diferentes, a soma tera o sinal do maior, e o valor é a subtração (em valores abolsutos) do maior menos o menor.
- Para fazer $a - b$, pode-se fazer $a + (-b)$
- Para multiplicar ou dividir dois números, o resultado é + se os dois tem o mesmo sinal e - se eles tem sinais diferentes.
- Um número negativo elevado a uma potência par tem resposta positiva
- Um número negativo elevado a uma potência impar tem resposta negativa