UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70546 ALDREY LARISSA GASTAO NOGUEIRA 19HEQ109 - 1 apos 23/09, 50%
/ ______ / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

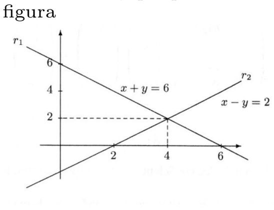
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

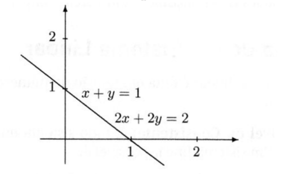


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

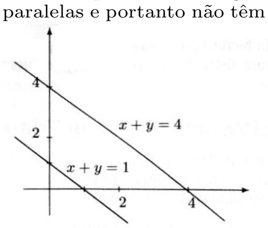


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
            x[i]=x[i]/a[i,i]
        return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular

Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.      +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.      +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 2 & 7 & 4 & 63 \\ 6 & 1 & 5 & 5 & 6 & 59 \\ 6 & 6 & 4 & 6 & 2 & 82 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 1 & 50 \\ 1 & 4 & 7 & 1 & 2 & 57 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 4 & 2 & 7 & 2 & 1 & 44 \\ 8 & 1 & 5 & 1 & 5 & 3 & 16 \\ 1 & 6 & 6 & 1 & 8 & 2 & 44 \\ 8 & 4 & 4 & 1 & 8 & 4 & 23 \\ 3 & 8 & 6 & 5 & 4 & 4 & 76 \\ 1 & 1 & 8 & 7 & 1 & 4 & 63 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70546 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x,
V: 1.06 70553 CAROLINE VEIGA DE MORAES
19HEQ109 - 2 apos 23/09, 50% ______ / ______ /

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

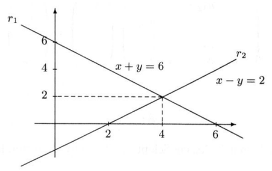
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

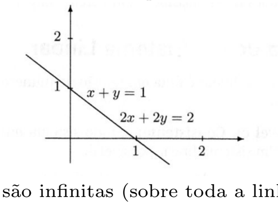


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

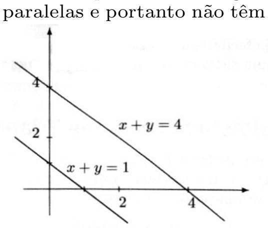


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
      [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.        +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.        +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.9999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.9999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 6 & 3 & 7 & 4 & 71 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 2 & 65 \\ 4 & 6 & 7 & 4 & 4 & 73 \\ 2 & 2 & 5 & 7 & 2 & 51 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 1 & 38 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 7 & 3 & 8 & 1 & 5 & 140 \\ 7 & 3 & 7 & 7 & 4 & 2 & 114 \\ 3 & 3 & 7 & 6 & 7 & 4 & 132 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 2 & 5 & 103 \\ 7 & 6 & 6 & 5 & 3 & 6 & 121 \\ 5 & 7 & 3 & 5 & 4 & 1 & 94 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70553 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70560 DANIEL FERNANDO ALMEIDA KARGER 19HEQ109 - 3 apos 23/09, 50%
/ ______ / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

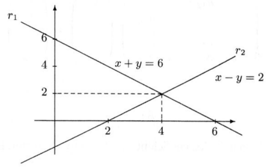
$$A.x=b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

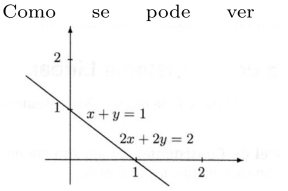


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura

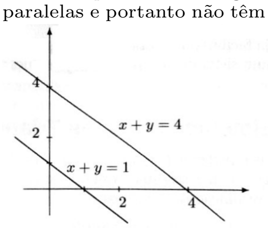


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3=L_3-p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2=L_2-p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3=L_3-p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z=\frac{-7}{-2.3333}=3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
      [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.        +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.        +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 7 & 3 & 5 & 1 & 133 \\ 5 & 5 & 3 & 4 & 1 & 99 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 1 & 63 \\ 4 & 3 & 3 & 4 & 1 & 78 \\ 2 & 7 & 7 & 7 & 5 & 120 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 4 & 1 & 1 & 5 & 1 & 25 \\ 6 & 8 & 5 & 5 & 6 & 5 & 86 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 4 & 4 & 64 \\ 7 & 5 & 5 & 8 & 2 & 2 & 59 \\ 6 & 6 & 7 & 3 & 2 & 7 & 98 \\ 5 & 1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 57 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70560 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 71237 DAVI ALEFE COSTA CARNEIRO 19HEQ109 - 4 apos 23/09, 50% ______ / ______ /

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

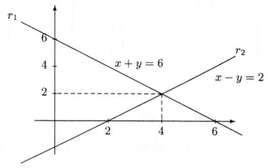
$$A.x=b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

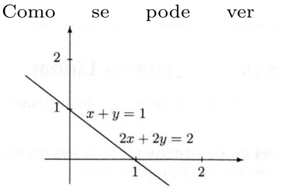


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura

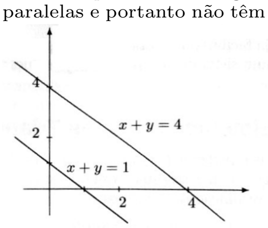


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3=L_3-p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2=L_2-p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3=L_3-p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z=\frac{-7}{-2.3333}=3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular

Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.        +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.        +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 5 & 5 & 5 & 2 & 72 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 2 & 42 \\ 7 & 5 & 7 & 3 & 3 & 85 \\ 7 & 3 & 7 & 7 & 5 & 105 \\ 7 & 3 & 3 & 2 & 1 & 34 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 6 & 5 & 2 & 4 & 8 & 5 & 113 \\ 3 & 6 & 6 & 2 & 5 & 8 & 131 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 4 & 7 & 92 \\ 3 & 8 & 6 & 8 & 6 & 5 & 118 \\ 6 & 8 & 2 & 3 & 2 & 3 & 51 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 5 & 8 & 109 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-71237 - 23/09

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

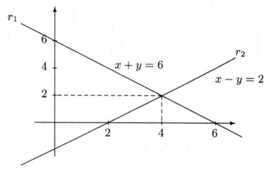
$$A.x=b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

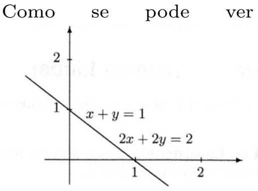


  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura

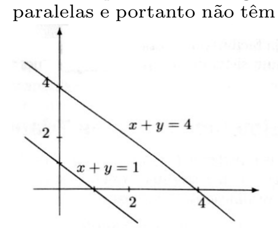


  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3=L_3-p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2=L_2-p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3=L_3-p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z=\frac{-7}{-2.3333}=3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
      [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j  5.        +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.        +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 7 & 7 & 4 & 7 & 131 \\ 5 & 1 & 1 & 5 & 6 & 101 \\ 6 & 6 & 3 & 7 & 7 & 150 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 4 & 87 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 4 & 82 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 5 & 6 & 2 & 1 & 37 \\ 2 & 3 & 6 & 8 & 2 & 4 & 60 \\ 5 & 6 & 6 & 1 & 5 & 4 & 61 \\ 1 & 8 & 1 & 4 & 2 & 5 & 19 \\ 1 & 8 & 5 & 7 & 4 & 5 & 43 \\ 5 & 2 & 5 & 4 & 8 & 8 & 86 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70577 - 23/09

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

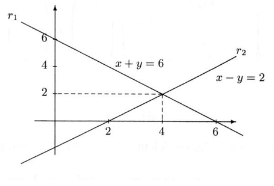
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

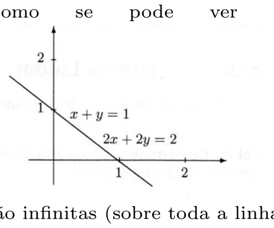
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura

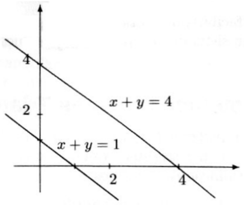
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 6 & 4 & 2 & 4 & 82 \\ 2 & 5 & 1 & 7 & 1 & 47 \\ 5 & 5 & 4 & 4 & 1 & 80 \\ 5 & 6 & 3 & 6 & 1 & 78 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 5 & 68 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 6 & 5 & 8 & 7 & 4 & 5 & 174 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 8 & 1 & 144 \\ 6 & 3 & 8 & 6 & 7 & 4 & 176 \\ 4 & 2 & 6 & 6 & 2 & 6 & 124 \\ 1 & 8 & 8 & 5 & 7 & 5 & 132 \\ 1 & 2 & 8 & 8 & 4 & 4 & 122 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70584 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70591 FLAVIA ALVES PRATES
19HEQ109 - 7 apos 23/09, 50% ______ / ______ /

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

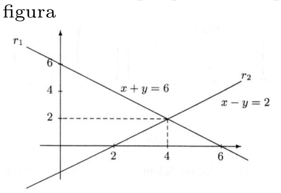
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

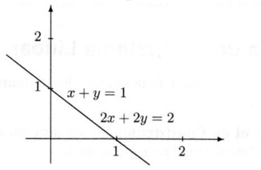
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura

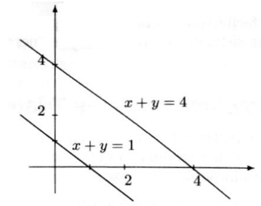
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.33333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1 + j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.   +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 4 & 3 & 5 & 5 & 91 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 5 & 102 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 60 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 3 & 37 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 4 & 44 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 6 & 2 & 4 & 2 & 7 & 4 & 75 \\ 8 & 5 & 1 & 2 & 1 & 3 & 48 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 1 & 7 & 135 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 5 & 7 & 79 \\ 3 & 3 & 6 & 2 & 5 & 7 & 71 \\ 8 & 8 & 4 & 7 & 5 & 1 & 103 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70591 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70603 FLAVIO PERELLES FILHO
19HEQ109 - 8 apos 23/09, 50% ______ / ______ /

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

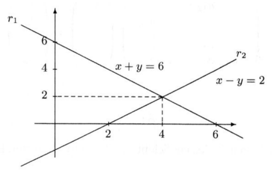
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

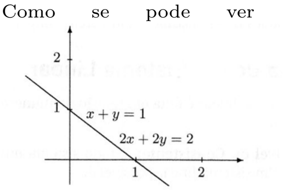
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura

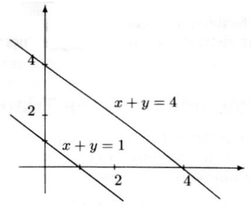
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j         ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j         ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 7 & 5 & 2 & 2 & 32 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 & 22 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 7 & 41 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 5 & 56 \\ 4 & 1 & 1 & 6 & 2 & 41 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 7 & 47 \\ 8 & 1 & 3 & 7 & 2 & 8 & 56 \\ 6 & 7 & 8 & 4 & 8 & 7 & 92 \\ 6 & 8 & 2 & 3 & 3 & 2 & 64 \\ 8 & 5 & 8 & 4 & 5 & 7 & 71 \\ 3 & 1 & 3 & 8 & 7 & 6 & 75 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70603 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70610 GABRIEL LISBOA KOSINSKI
19HEQ109 - 9 apos 23/09, 50% ______ / ______ /

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

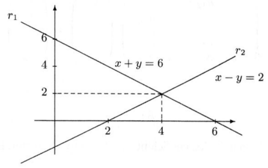
$$A.x=b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

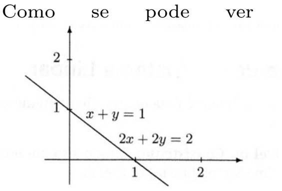


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

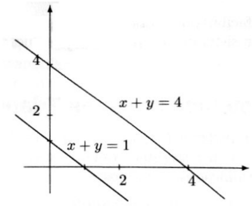


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3=L_3-p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2=L_2-p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3=L_3-p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z=\frac{-7}{-2.3333}=3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 7 & 5 & 5 & 98 \\ 4 & 1 & 7 & 3 & 6 & 106 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 2 & 53 \\ 7 & 1 & 2 & 6 & 1 & 72 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & 3 & 84 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 8 & 4 & 7 & 8 & 7 & 7 & 78 \\ 3 & 8 & 2 & 5 & 5 & 1 & 91 \\ 8 & 4 & 1 & 3 & 4 & 8 & 54 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 5 & 6 & 49 \\ 6 & 8 & 4 & 4 & 8 & 6 & 96 \\ 5 & 3 & 2 & 8 & 1 & 8 & 48 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70610 - 23/09

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

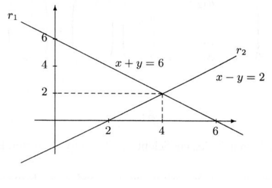
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

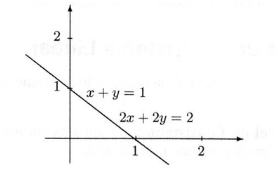
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura

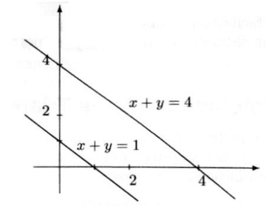
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
      [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 5 & 7 & 5 & 3 & 45 \\ 6 & 4 & 3 & 4 & 2 & 40 \\ 7 & 6 & 1 & 6 & 3 & 45 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 5 & 49 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 6 & 51 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 8 & 8 & 5 & 7 & 7 & 3 & 133 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 40 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 5 & 7 & 83 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 8 & 8 & 57 \\ 5 & 3 & 4 & 8 & 8 & 4 & 76 \\ 3 & 4 & 1 & 4 & 3 & 1 & 58 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70627 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70634 ISABELLA DO ROSARIO 19HEQ109 - 11 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

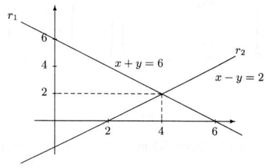
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

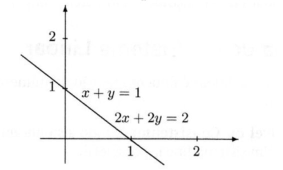


  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura

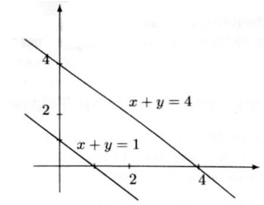


  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 4 & 2 & 1 & 7 & 58 \\ 7 & 6 & 4 & 3 & 1 & 52 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 6 & 108 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 57 \\ 5 & 5 & 5 & 7 & 5 & 118 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 8 & 7 & 2 & 3 & 8 & 37 \\ 2 & 3 & 7 & 3 & 3 & 6 & 51 \\ 4 & 2 & 2 & 8 & 8 & 7 & 120 \\ 8 & 1 & 4 & 6 & 8 & 1 & 137 \\ 6 & 6 & 8 & 1 & 6 & 8 & 58 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 5 & 4 & 123 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70634 - 23/09

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

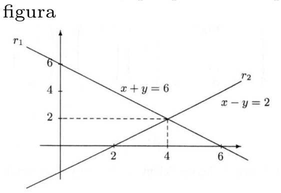
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

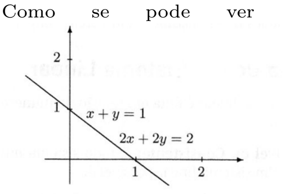


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

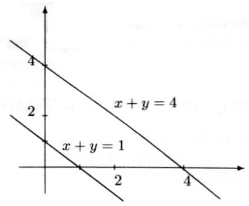


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 6 & 6 & 4 & 130 \\ 4 & 5 & 5 & 6 & 7 & 131 \\ 7 & 5 & 7 & 3 & 7 & 126 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 2 & 90 \\ 1 & 3 & 1 & 5 & 7 & 90 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 5 & 4 & 3 & 3 & 6 & 56 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 4 & 4 & 55 \\ 8 & 6 & 6 & 3 & 7 & 4 & 84 \\ 3 & 7 & 5 & 5 & 3 & 5 & 88 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 5 & 4 & 61 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 5 & 5 & 78 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70641 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70658 JOSE PAULO DE OLIVEIRA NETO 19HEQ109 - 13 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

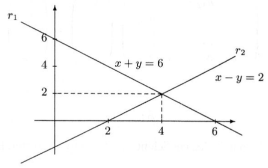
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

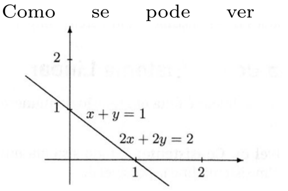


  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura

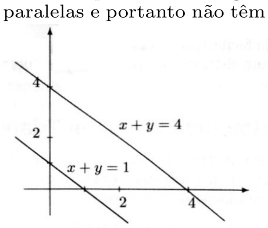


  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular

Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
      [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 4 & 7 & 1 & 4 & 88 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 82 \\ 7 & 7 & 7 & 6 & 2 & 119 \\ 3 & 2 & 7 & 5 & 4 & 102 \\ 1 & 5 & 5 & 6 & 5 & 87 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 5 & 2 & 7 & 1 & 6 & 2 & 87 \\ 6 & 6 & 6 & 1 & 5 & 4 & 72 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 7 & 6 & 44 \\ 7 & 7 & 3 & 4 & 5 & 8 & 58 \\ 3 & 7 & 4 & 4 & 7 & 2 & 71 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 6 & 4 & 80 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70658 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70665 JULIANA HIROMI SUMI
19HEQ109 - 14 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

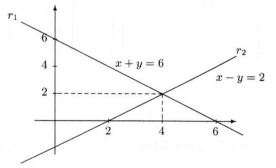
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

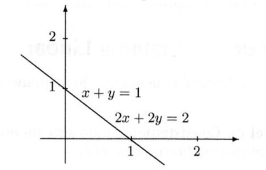


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

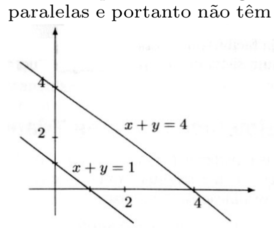


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
            x[i]=x[i]/a[i,i]
        return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.        +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.        +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 5 & 1 & 7 & 6 & 82 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 1 & 99 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & 5 & 89 \\ 7 & 7 & 1 & 7 & 4 & 96 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 2 & 48 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 5 & 4 & 7 & 7 & 4 & 8 & 23 \\ 5 & 5 & 1 & 1 & 1 & 7 & 15 \\ 7 & 4 & 8 & 1 & 7 & 3 & 58 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 5 & 2 & 40 \\ 7 & 8 & 3 & 6 & 3 & 7 & 32 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 1 & 1 & 23 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70665 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70672 LEONARDO CHAVES 19HEQ109 - 15 apos 23/09, 50% ______ / ______ / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

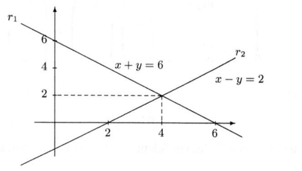
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

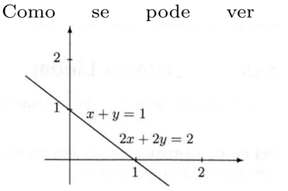
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura

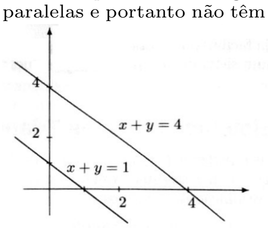
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j  5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 5 & 1 & 3 & 7 & 92 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 4 & 73 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 3 & 112 \\ 1 & 7 & 5 & 5 & 2 & 55 \\ 1 & 1 & 4 & 7 & 7 & 81 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 6 & 6 & 5 & 2 & 3 & 1 & 80 \\ 8 & 2 & 2 & 8 & 8 & 4 & 166 \\ 1 & 7 & 1 & 4 & 7 & 6 & 105 \\ 5 & 4 & 6 & 1 & 3 & 1 & 62 \\ 1 & 2 & 6 & 6 & 2 & 3 & 93 \\ 2 & 6 & 6 & 8 & 8 & 3 & 144 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70672 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70689 LEONARDO MARQUES CAMILO
19HEQ109 - 16 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

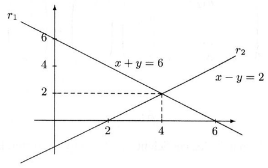
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

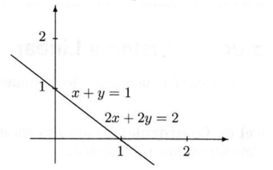
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura

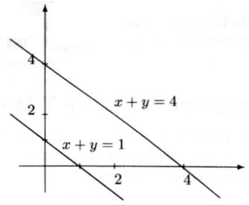
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.33333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular

Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1 + j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j         ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j         ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 38 \\ 1 & 6 & 2 & 6 & 5 & 96 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 6 & 39 \\ 6 & 6 & 2 & 4 & 1 & 53 \\ 1 & 4 & 6 & 1 & 6 & 64 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 5 & 1 & 4 & 1 & 5 & 2 & 73 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 2 & 3 & 48 \\ 7 & 2 & 5 & 4 & 6 & 3 & 99 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 4 & 3 & 95 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 5 & 2 & 61 \\ 6 & 6 & 1 & 6 & 8 & 8 & 102 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70689 - 23/09

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

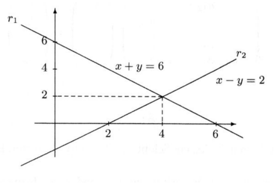
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

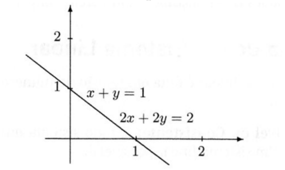


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura

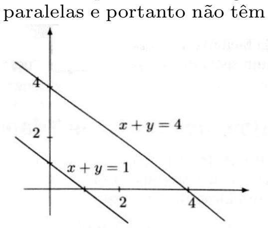


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{array}\right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{array}\right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{array}\right)$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{array}\right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 2 & 1 & 2 & 5 & 47 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 3 & 65 \\ 3 & 7 & 7 & 1 & 4 & 79 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 5 & 86 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 2 & 61 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 7 & 3 & 4 & 8 & 6 & 3 & 73 \\ 3 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 & 80 \\ 6 & 7 & 6 & 8 & 2 & 7 & 84 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 5 & 1 & 29 \\ 7 & 3 & 4 & 3 & 5 & 3 & 77 \\ 4 & 8 & 1 & 7 & 4 & 8 & 27 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-71206 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 71213 MANOELA S VIEIRA 19HEQ109 - 18 apos 23/09, 50% _____ / _____ / _____

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

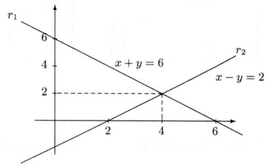
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

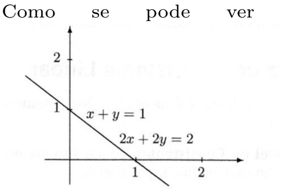


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura

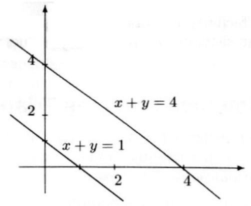


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{array}\right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{array}\right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{array}\right)$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{array}\right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
      [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j  5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 5 & 3 & 1 & 6 & 95 \\ 6 & 2 & 1 & 5 & 3 & 64 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 3 & 95 \\ 1 & 5 & 7 & 3 & 6 & 113 \\ 3 & 2 & 7 & 3 & 6 & 106 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 8 & 6 & 2 & 2 & 4 & 3 & 106 \\ 8 & 1 & 8 & 6 & 1 & 8 & 88 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & 6 & 8 & 56 \\ 7 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 74 \\ 8 & 4 & 7 & 4 & 7 & 3 & 102 \\ 5 & 6 & 2 & 5 & 8 & 6 & 72 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-71213 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70696 MARCELO EDUARDO MARQUES RIBAS 19HEQ109 - 19 apos 23/09, 50% ______ / ______ / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

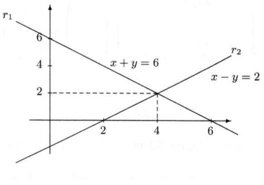
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

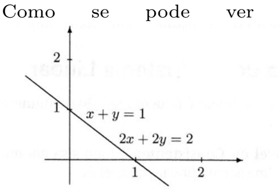


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

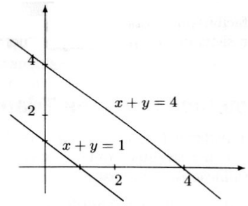


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.33333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1 + j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j         ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j         ]
 [0.+0.j  0.   +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.9999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 5 & 6 & 3 & 3 & 118 \\ 6 & 4 & 2 & 1 & 5 & 101 \\ 4 & 5 & 5 & 5 & 2 & 78 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 38 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 7 & 80 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 8 & 4 & 3 & 5 & 1 & 123 \\ 8 & 8 & 4 & 6 & 2 & 5 & 140 \\ 8 & 6 & 8 & 1 & 5 & 7 & 105 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 8 & 7 & 70 \\ 4 & 8 & 3 & 3 & 3 & 5 & 111 \\ 7 & 7 & 3 & 7 & 6 & 3 & 138 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70696 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70715 MARYNA BORNEMANN DA SILVA 19HEQ109 - 20 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

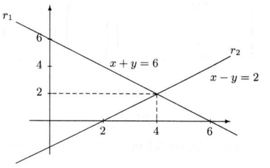
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

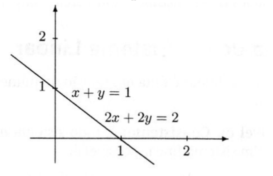
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura

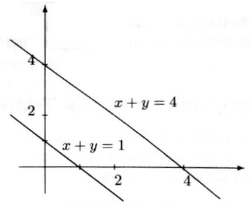
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.        +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.        +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 6 & 3 & 4 & 98 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 5 & 91 \\ 7 & 1 & 3 & 3 & 3 & 82 \\ 5 & 5 & 6 & 7 & 3 & 137 \\ 6 & 7 & 4 & 2 & 1 & 95 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 6 & 2 & 7 & 4 & 7 & 106 \\ 4 & 3 & 8 & 4 & 3 & 7 & 69 \\ 6 & 6 & 8 & 8 & 2 & 6 & 80 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 4 & 8 & 105 \\ 1 & 8 & 2 & 3 & 1 & 3 & 65 \\ 5 & 8 & 8 & 2 & 6 & 5 & 130 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:

1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

2.

x	y	z	w	v	t

109-70715 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70722 MATEUS DE MATOS LEME 19HEQ109 - 21 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

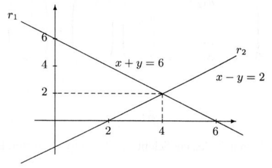
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

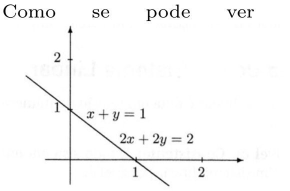


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura

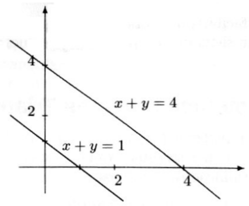


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular

Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.         +0.j         ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.         +0.j         ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 6 & 3 & 1 & 6 & 137 \\ 6 & 7 & 2 & 2 & 1 & 103 \\ 4 & 7 & 6 & 1 & 2 & 112 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 7 & 152 \\ 2 & 5 & 7 & 2 & 2 & 94 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 3 & 5 & 4 & 4 & 8 & 49 \\ 3 & 7 & 3 & 5 & 3 & 7 & 45 \\ 6 & 6 & 7 & 2 & 6 & 2 & 47 \\ 7 & 2 & 4 & 4 & 6 & 6 & 44 \\ 2 & 2 & 7 & 3 & 4 & 4 & 40 \\ 5 & 8 & 1 & 3 & 8 & 8 & 76 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70722 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70739 MAYARA MATEUS ROSA
19HEQ109 - 22 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

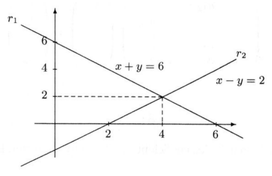
$$A.x=b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

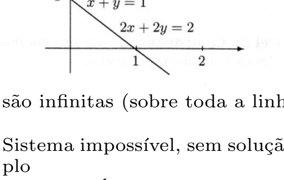


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

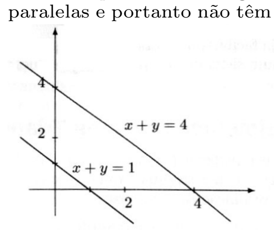


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular

Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.        +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.        +0.j        ]
 [0.+0.j  0.   +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 7 & 3 & 7 & 6 & 98 \\ 7 & 1 & 6 & 1 & 4 & 50 \\ 5 & 7 & 3 & 7 & 6 & 96 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 7 & 68 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 43 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 8 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 111 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 8 & 4 & 159 \\ 3 & 7 & 2 & 8 & 7 & 1 & 77 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 8 & 74 \\ 5 & 8 & 5 & 3 & 1 & 3 & 124 \\ 2 & 8 & 2 & 1 & 1 & 2 & 67 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70739 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70746 PHILLIP YAGYU MORIBAYASHI 19HEQ109 - 23 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

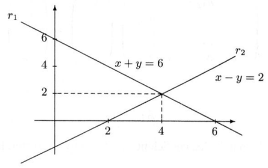
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

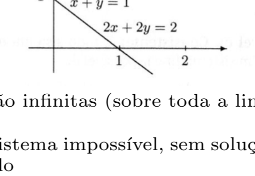


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

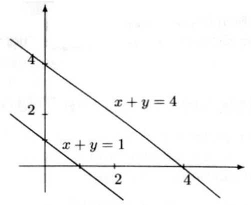


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
      [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 1 & 3 & 2 & 6 & 41 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 7 & 80 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 6 & 82 \\ 7 & 7 & 5 & 2 & 5 & 57 \\ 7 & 5 & 4 & 2 & 7 & 58 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 5 & 1 & 1 & 8 & 4 & 4 & 26 \\ 2 & 3 & 6 & 7 & 5 & 6 & 41 \\ 6 & 6 & 4 & 6 & 2 & 2 & 64 \\ 2 & 6 & 3 & 1 & 4 & 3 & 48 \\ 2 & 7 & 7 & 8 & 8 & 2 & 66 \\ 4 & 1 & 6 & 6 & 7 & 5 & 54 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70746 - 23/09

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

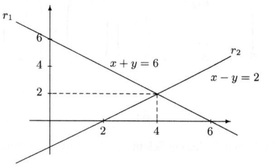
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

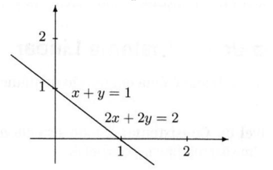
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura

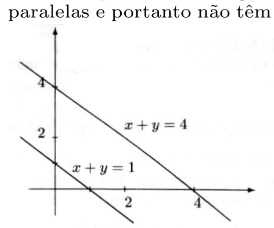
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 88 \\ 1 & 6 & 3 & 3 & 4 & 84 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 1 & 118 \\ 4 & 4 & 7 & 1 & 4 & 99 \\ 6 & 6 & 5 & 1 & 2 & 95 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 8 & 2 & 7 & 1 & 5 & 2 & 57 \\ 8 & 5 & 4 & 2 & 3 & 8 & 76 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 8 & 7 & 89 \\ 7 & 1 & 5 & 3 & 8 & 6 & 84 \\ 8 & 4 & 4 & 1 & 5 & 1 & 60 \\ 5 & 5 & 8 & 4 & 7 & 4 & 67 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70753 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70760 RODRIGO ENZO V. SCHWITZNER 19HEQ109 - 25 apos 23/09, 50%
/ ______ / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

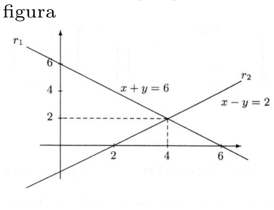
$$A.x=b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

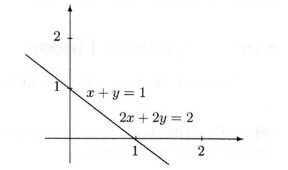
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura

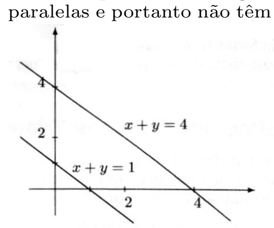
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3=L_3-p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2=L_2-p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3=L_3-p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z=\frac{-7}{-2.3333}=3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 5 & 30 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 3 & 64 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 7 & 41 \\ 2 & 1 & 5 & 5 & 5 & 56 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 40 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 7 & 5 & 8 & 5 & 4 & 7 & 100 \\ 8 & 1 & 6 & 2 & 7 & 6 & 61 \\ 7 & 7 & 1 & 1 & 7 & 7 & 95 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 8 & 87 \\ 6 & 8 & 6 & 4 & 5 & 4 & 121 \\ 1 & 3 & 4 & 8 & 2 & 5 & 48 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70760 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 71149 STHEFANNY GRANZOTI PEREIRA 19HEQ109 - 26 apos 23/09, 50%
/ ______ / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

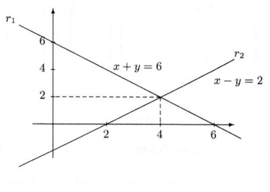
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

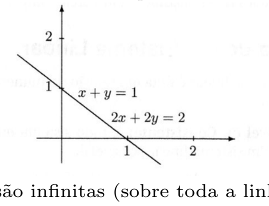


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura

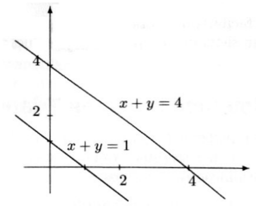


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
      [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.      +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.      +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 2 & 6 & 2 & 2 & 26 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 6 & 62 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 3 & 30 \\ 5 & 7 & 3 & 1 & 1 & 41 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 3 & 37 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 51 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 2 & 4 & 43 \\ 6 & 4 & 7 & 8 & 3 & 5 & 75 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 6 & 7 & 68 \\ 6 & 3 & 3 & 5 & 5 & 1 & 53 \\ 8 & 8 & 8 & 5 & 8 & 2 & 72 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-71149 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70777 VINICIUS GABRIEL DE AQUINO 19HEQ109 - 27 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

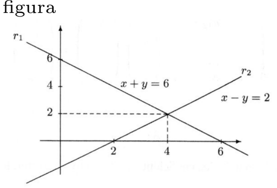
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

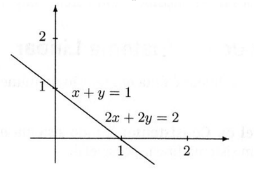


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

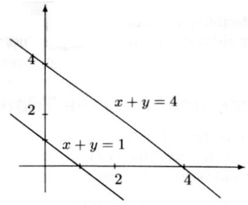


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 5 & 3 & 4 & 2 & 63 \\ 4 & 7 & 7 & 7 & 2 & 110 \\ 6 & 1 & 4 & 6 & 1 & 68 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 3 & 92 \\ 2 & 4 & 7 & 7 & 7 & 108 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 8 & 5 & 1 & 3 & 4 & 4 & 53 \\ 8 & 5 & 5 & 7 & 8 & 8 & 117 \\ 5 & 1 & 1 & 7 & 3 & 2 & 36 \\ 7 & 3 & 3 & 3 & 6 & 1 & 55 \\ 4 & 4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 99 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 5 & 4 & 77 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70777 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70784 VINICIUS RICARDO NUNES 19HEQ109 - 28 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

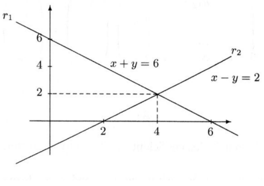
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

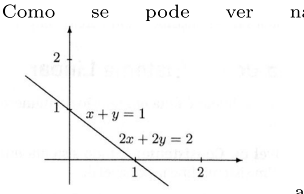


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

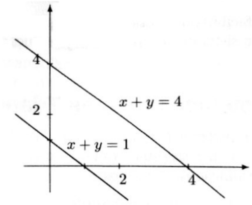


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25 - p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27 - p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j         ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j         ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 7 & 3 & 6 & 3 & 58 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 7 & 29 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 6 & 37 \\ 4 & 2 & 3 & 7 & 4 & 47 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 7 & 36 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 7 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 83 \\ 7 & 8 & 2 & 5 & 6 & 1 & 59 \\ 5 & 7 & 2 & 3 & 5 & 4 & 64 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 2 & 4 & 72 \\ 3 & 8 & 1 & 2 & 5 & 1 & 42 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 1 & 5 & 86 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70784 - 23/09

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/08/2019 - 12:08:41.9
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.06 70791 VINICIUS SILVEIRA MALESKI
19HEQ109 - 29 apos 23/09, 50% ______ / / ______

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

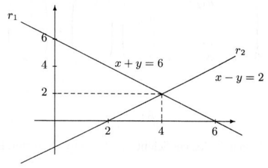
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

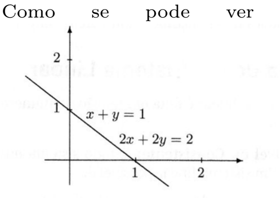
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura

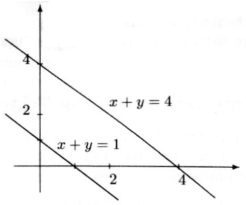
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.33333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1 + j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 3 & 25 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 6 & 26 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 7 & 28 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & 4 & 37 \\ 7 & 3 & 7 & 4 & 1 & 70 \end{array}\right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 8 & 8 & 7 & 4 & 8 & 3 & 138 \\ 1 & 6 & 6 & 2 & 3 & 4 & 90 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 3 & 7 & 69 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 2 & 6 & 87 \\ 3 & 7 & 7 & 5 & 7 & 1 & 98 \\ 6 & 5 & 5 & 3 & 1 & 6 & 105 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:
1.

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:
2.

x	y	z	w	v	t

109-70791 - 23/09