Progressões

Progressão aritmética

Uma progressão aritmética (PA) é uma sucessão de números de maneira que, a partir do segundo cada termo é igual ao anterior mais um número constante não nulo. A PA é representada como

$$a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$$

Os números que formam a progressão denominam-se termos. O número de termos é a segunda característica importante de uma PA e é representado pela letra n, que é sempre um número inteiro e maior que zero.

Quando $n = \infty$, diz-se que a PA é ilimitada.

A primeira característica de uma PA é o primeiro termo, que é representado por a_1. O número relativo que se soma a cada termo para obter o seguinte é a seguinte característica importante de uma PA e denomina-se *razão*. Ela é representada pela letra r.

Daqui, descobre-se que uma PA fica completamente determinada quando se conhecem suas 3 características, a saber:

a_1 termo inicial

r razão

n número de termos

A progressão é dita crescente ou decrescente conforme a razão seja positiva ou negativa.

Dois termos de uma PA limitada chamam-se equidistantes dos extremos quando o número de termos que antecedem um deles é igual ao número de termos que seguem o outro.

Interpolar m meios aritméticos entre 2 números a e b é formar uma pregressão aritmética de $m + 2$ termos cujos extremos sejam a e b.

Em uma PA, cada termos, excetuando-se os extremos é a média aritmética entre o antecedente e o consequente.

Em uma PA cada termo a partir do segundo é igual ao primeiro somado com o produto de número de termos que o antecedem multiplicado pela razão. Veja-se a demonstração deste fato
$a_2 = a_1 + r$
$a_3 = a_2 + r$
$a_4 = a_3 + r$
$a_{n-1} = a_{n-2} + r$
$a_n = a_{n-1} + r$
Somando estas $n-1$ igualdades e eliminando os termos comuns fica-se com a expressão geral de uma PA que é

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$$

Com esta expressão, dados 3 dos 4 termos (a_1, a_n, n, r) pode-se sempre calcular o quarto elemento faltante, usando-se das fórmulas derivadas da expressão geral, como segue:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times r$$

$$a_1 = a_n - (n - 1) \times r$$

$$r = \frac{a_n - a_1}{n - 1}$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$$

Um uma PA limitada a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Se a PA tiver um número ímpar de termos, o termo do meio é a média aritmética dos extremos.

A soma dos termos de uma PA é dada pela expressão

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}$$

Progressão Geométrica

Uma progressão geométrica (PG) é uma sucessão de números tal que a partir do segundo cada termo é igual ao anterior multiplicado por um valor constante diferente de zero e da unidade.

Os números que formam a PG são denominados *termos*. O primeiro termo é representado por a_1. O número de termos da PG é representado pela letra n. O número constante pelo qual se multiplica cada termo é denominado *razão* e é representado por q.

A PG diz-se crescente ou decrescente conforme a razão seja maior ou menor do que 1.

Quando o número de termos é igual a ∞ a progressão geométrica é ilimitada.

Dois termos de uma PG limitada chamam-se equidistantes dos extremos quando o número de termos que antecedem um deles é igual ao número de termos que seguem o outro.

Interpolar m meios geométricos entre dois números a e b é formar uma progressão geométrica de $m + 2$ termos cujos extremos sejam a e b.

Em uma PG a divisão de qualquer termo pelo seu antecedente é constante e é igual a razão.

Cada termo de uma PG, excetuando-se os extremos é a média geométrica entre o antecedente e o consequente.

Cada termo de uma PG a partir do segundo, é igual ao primeiro termo multiplicado pela razão elevada a um expoente igual ao número de termos que o precede. Com isto, chega-se à fórmula do termo geral

$$a_n = a_1 \times q^{n-1}$$

Com esta fórmula, dadas 3 das 4 incógnitas, obter a faltante usando as fórmulas

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

$$n = \frac{log\ a_n - log\ a_1}{log\ q} + 1$$

Em uma PG limitada o produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

A soma dos termos de uma PG é dada por

$$S_n = \frac{a_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}$$

Finalmente, quando uma PG é decrescente e ilimitada, a soma dos n termos quando este número de termos cresce ilimitadamente tende para um valor definido chamado *limite da soma da progressão* e é dado por

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Alguns exercícios feitos

1. Ache o elemento a_{19} da progressão: 6, 11, 16, ...
Da análise descobre-se que $r = a_2 - a_1 = 5$. Do enunciado, descobre-se que $n = 19$ e aplicando na fórmula $a_n = a_1 + (n - 1) \times r$, tem-se $a_{19} = a_1 + (19 - 1) \times 5$ ou $a_{19} = 6 + (18 \times 5) = 6 + 90 = 96$

2. Qual o primeiro termo de uma PA de 50 termos cujo último termo é -103 e a razão é -2 ?
Usando a fórmula acima, fica-se $a_{50} = a_1 + (n-1) \times r$ e sabe-se que $a_{50} = -103$, $r = -2$ e $n = 50$. Daqui, $-103 = a_1 + (49 \times -2$ e cozinhando, $a_1 = -103 + 98 = -5$

3. Interpolar 8 meios aritméticos entre 11 e 47
Pede-se uma PA com 10 termos ($n = 10$). São dados $a_1 = 11$, $a_{10} = 47$. Usando a fórmula da razão, $r = \frac{a_n - a_1}{n-1}$, tem-se $r = \frac{47-11}{10-1} = 4$

4. O terceiro termo de uma PA é 21 e o oitavo é 6. Calcular o vigésimo termo.
Da fórmula geral $a_n = a_1 + (n-1) \times r$ tem-se $a_3 = a_1 + 2 \times r$ e $a_8 = a_1 + 7 \times r$. Substituindo, fica $21 = a_1 + 2 \times r$ e $6 = a_1 + 7 \times r$ ou $a_1 + 2r = 21$ e $a_1 + 7r = 6$ Resolvendo o sistema tem-se $r = -3$ e $a_1 = 27$.

5. Achar o décimo termo da progressão 3, 9, 27, ...
Pelo jeitão da coisa, ve-se que é uma PG. Usar-se-á a fórmula $a_n = a_1 \times q^{n-1}$. Aqui $a_1 = 3$, $q = 3$ e $n = 10$ e fica $a_n = 3 \times 3^9 = 3^{10} = 59049$.

6. Qual o primeiro termo de uma progressão geométrica de 9 termos cujo último termo é 78125 e a razão é 5 ?
Usa-se a fórmula $a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$ e fica $a_1 = \frac{78125}{5^8}$. Ora, $78125 = 5^7$ e substituindo fica $a_1 = \frac{5^7}{5^8} = \frac{1}{5}$.

7. Inserir 3 meios geométricos entre 16 e 81.
Tem-se uma PG de $n = 5$, $a_1 = 16$ e $a_5 = 81$. Usando $q = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$ Agora $q = \sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ e $q = \sqrt[4]{\frac{3^4}{2^4}}$ ou $q = \frac{3}{2}$. Neste caso pode-se desconsiderar $q \leq 0$.

☞ Para você fazer

1. Ache x de modo que $x - 2$, $x + 2$ e $x + 17$ estejam em progressão geométrica.

2. O primeiro termo de uma progressão é -10. Qual o terceiro termo, sabendo que a razão, o número de termos e o último termo são números consecutivos ? (UFRJ-1969)

3. O quinto e o nono termos de uma progressão aritmética são respectivamente as raízes de $x^2 - 8x - 20 = 0$. Ache o menor termo positivo da progressão

4. A soma de 3 números positivos em PA é 30. Se esses números forem aumentados em 1, 4 e 14 respectivamente, os novos números estarão em PG. Ache o número do meio.

5. A soma de 3 números em progressão geométrica é 186. Se acrescentarmos 48 ao número do meio sem alterar os outros 2, obtemos 3 números em PA. Qual o maior número da PG ?

6. Em uma PG $a_1 = 6$, $S_n = 6138$ e $a_n = 3072$. Calcular n.

7. Ache o quinto termo de uma progressão aritmética, sabendo que o quarto termo é $3m - 1$ e o nono termo é $8m + 9$

8. Ache o terceiro termo de uma progressão aritmética sabendo que o quinto e o oitavo termos são as raizes da equação $x^2 + 7ax + 10a^2 = 0$

9. Calcule a razão de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e o quarto termo é $\frac{4}{27}$. (Gama Filho 1972)

10. A soma dos p primeiros números ímpares é igual a ? (COMSART-1973)

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10