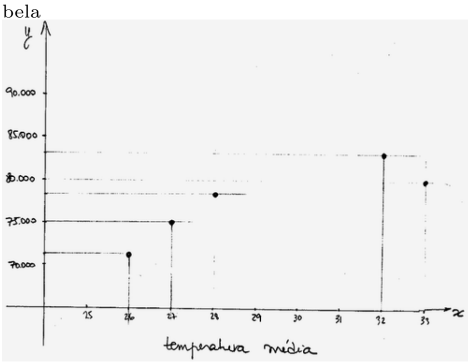
Seja um problema comum

A Companhia Sonhos gelados produz e comercializa sorvetes. Ela resolveu analisar a temperatura média do verão nos últimos anos e o volume de vendas nessa mesma estação. Uma amostra é apresentada:

temperatura(^{o}C)	32	28	33	27	26
Vendas (mil)	83	78	80	75	71

1. Plote num sistema de eixos os pontos da tabela



2. Determine a equação da reta que melhor se ajusta

As equações normais do problema cujas incógnitas são a e b na equação $y = a + bx$, são

$$na + (\sum_{i=1}^{n} x_i)b = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

e

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)a + (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)b = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Neste caso, tem-se:

n	=	5
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	=	146
$\sum_{i=1}^{n} y_i$	=	387
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	=	4302
$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	=	11351

E fica o sistema

$$5a + 146b = 387$$

$$146a + 4302b = 11351$$

Da primeira equação fica $a = 77,4 - 29.2b$. Levando este valor na segunda equação, fica

$$38,8b = 50,6$$

ou

$$b = 1,30$$

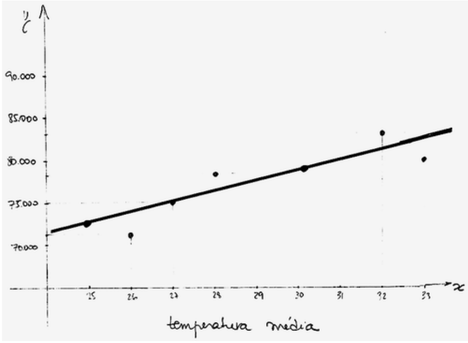
. Retornando à primeira equação para obter o valor de a, tem-se $a = 39,44$.

Retornando às equações normais, fica:

$$y = 39,44 + 1,30x$$

3. Esboce a reta obtida

Para tanto, escolheram-se 2 pontos de abcissas $x = 25$ e $x = 30$. As ordenadas correspondentes são $y = 71,94$ e $y = 78,44$ respectivamente. Colocando estes dois novos pontos no gráfico, ficou:



Solução A teoria que se propõe a resolver este problema é o chamado Método dos mínimos quadrados. No caso em particular, busca-se uma reta, de fórmula $y = a+bx$, onde a e b são os parâmetros a determinar. Busca-se minimizar a distância de cada ponto (x_i, y_i) da tabela dada a cada ponto $(X_i, a + bx_i)$ da reta.

Construindo uma tabela com os dados do problema e nomeando-os como segue, fica

n	=	N
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	=	J
$\sum_{i=1}^{n} y_i$	=	K
$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	=	L
$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	=	M

Reescrevendo as equações normais da reta $y = a + bx$, usando os símbolos acima, fica:

$Na + Jb = K$ (eq. 1) e

$Ja + Lb = M$ (eq. 2)

Multiplicando a eq.1 por J e a eq.2 por N, fica:

$JNa + J^2b = KJ$ (eq. 3) e

$JNa + LNb = NM$ (eq. 4)

multiplicando a eq.4 por -1 e somando as duas, fica:

$(J^2 - LN)b = KJ - NM$ (eq.5) ou

$b = \frac{KJ-NM}{J^2-LN}$ (eq.6) que permite encontrar o valor de b.

Levando este valor à eq.3 e simplificando uma ocorrência de J, fica:

$a = \frac{KJ-J^2b}{JN} = \frac{K-Jb}{N}$ (eq.7) obtem-se o valor de a, o que permite reconstruir a equação da reta procurada. Agora pode-se extrapolar qualsquer ponto desejado, bastando colocar o valor de x desejado na reta, e a seguir calcular o valor de y esperado.

Para testar o formulário acima experimente calcular a e b do exercício inicial usando as fórmulas 6 e 7. Veja como funciona.

O algoritmo

Dada uma série de valores de x e de y, calcula-se as somas $J = (\sum x)$, $K = (\sum y)$, $L = (\sum x^2)$, $M = (\sum xy)$ e $N = n$ e daí:

```
função MINQUA
IND,J,K,L,M,N,X,Y,CT:inteiro
VX,VY: vetor [1..1000] de inteiro
A,B:real
leia (X)
CT ← 0
enquanto X ≠ -1
    CT ← CT + 1
    VX[CT] ← X
    escreva ("digite o par de ",X)
    leia (Y)
    VY[CT] ← Y
    escreva ("digite mais um X ou -1 para encerrar")
    leia (X)
fim{enquanto}
J ← K ← L ← M ← N ← 0
para IND=1; IND < CT; IND++
    J ← J + VX[IND]
    K ← K + VY[IND]
    L ← L + VX[IND]²
    M ← M + VX[IND] × VY[IND]
    N ← N + 1
fim{para}
B ← (KJ−NM)/(J²−LN)
A ← (K−JB)/N
leia (X)
enquanto X ≠ −1
    Y ← A + B × X
    escreva (Y)
    leia (X)
fim{enquanto}
```

Para testar

o algoritmo implementado, faça:

```
x = 26 31 33 36 38 41 42 44
y = 40 41 45 49 51 55 56 58
a = 9.249642005 e b = 1.103102625
para x = 45, y = 58.88  e para x = 50, y = 64.40
```

☞ Para você fazer

1. No exercício a seguir, considere valores de x=

54 57 59 64 68 69 71 73

associados aos seguintes valores de y=

229 244 245 271 285 290 295 304

Calcule os parâmetros a e b, e depois infira os valores de y para dois valores de x dados (x_1 e x_2)

74 76

Para calcular a resposta, arredonde para 2 casas decimais

y_1	y_2

2. Em um país distante chamado LISARB, há muitos problemas econômicos. Em particular, há uma inflação persistente que APARENTEMENTE depende entre outras coisas, da emissão de moeda pelo Banco Central daquele país. Economistas que apoiam esta visão levantaram a inflação e a emissão de moeda nos últimos 10 anos, obtendo as duas séries históricas, a seguir:

```
EMISSAO ANUAL DE MOEDA NOS ULTIMOS
10 ANOS (em bilhoes de dólares)
211  317  263  328  248  586  479  736  573  628

INFLAÇAO ANUAL NOS ULTIMOS 10 ANOS
5.4  5.3  5.6  8.3  5.1  7.1  9.9  8.2  9.3 10.2
```

Para o ano próximo, o governo pretende efetuar uma emissão de

775

bilhões de dólares. Segundo este modelo econométrico, baseado no método dos mínimos quadrados, qual é a inflação esperada ?

inflação