Cálculo Numérico - Sistemas Lineares

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

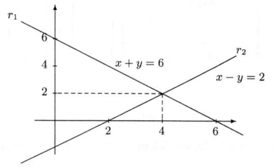
$$A.x=b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Este sistema, que pode ser representado na figura

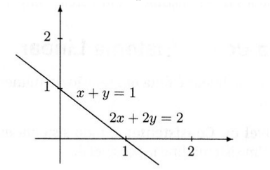
  

  admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura

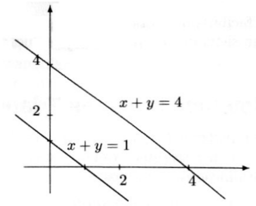
  

  as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

  $$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

  Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.

Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x=b$ é achar um sistema equivalente $A'.x=b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 2 & 5 & 2 & | & 25 \end{pmatrix}$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3=L_3-p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2,5,2,25-p.1,4,4,23$ e escolhendo $p=2$, a nova linha passa a ser $0,-3,-6,-21$ e a matriz fica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 3 & 3 & 1 & | & 27 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2=L_2-p.L_1$ e fazendo $p=3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3,3,1,27-p.1,4,4,23$. Com $p=3$, a nova linha fica sendo $0,-9,-11,-42$ e a matriz agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & -3 & -6 & | & -21 \end{pmatrix}$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3=L_3-p.L_2$ e fazendo $p=0.333333$, a segunda linha fica sendo $0,0,-2.33333,-7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & | & 23 \\ 0 & -9 & -11 & | & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z=\frac{-7}{-2.3333}=3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y=1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x=7$. Ou seja, o vetor $\{7,1,3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

Método LU

No método LU, deve-se transformar a matriz A (dos coeficientes) em um produto matricial $L.U$ onde a matriz U (de Upper) é a própria matriz A devidamente escalonada (como visto no método anterior) e a matriz L (de Lower) é uma matriz que contém unidades na diagonal principal, zeros acima destas posições e que contém os pivots do método anterior abaixo da diagonal principal.

No exemplo anterior, as matrizes L e U são

$$U=\begin{pmatrix} 1.00 & 4.00 & 4.00 \\ 0 & -9.00 & -11.00 \\ 0 & 0 & -2.33 \end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 \\ 3.00 & 1.00 & 0 \\ 2.00 & 0.33 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que a multiplicação matricial entre $L.U$ recupera a matriz A. Obtendo estas duas matrizes, é fácil calcular y (o vetor de termos independentes que é calculado junto com a matriz escalonada no método anterior e depois o vetor x de soluções. Em termos algorítmicos, fica $[L]\{y\}=\{b\}$. Agora é praticamente imediato calcular o vetor $\{y\}$. Finalmente, o sistema se resolve calculando $[U].\{x\}=\{y\}$. Acompanhe o algoritmo

```
def lu1(u,b):
    n=len(u)
    x=[0]*n
    y=[0]*n
    L=np.zeros((n,n))
    for passo in range(0,n):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=u[i,passo]/u[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                u[i,j]=u[i,j]-pivot*u[passo,j]
            L[i,passo]=pivot
    for i in range(0,n):
        L[i,i]=1
    y[0]=b[0]
    for i in range(1,n):
        y[i]=b[i]
        for j in range(0,i):
            y[i]=y[i]-L[i,j]*y[j]
    x[n-1]=y[n-1]/u[n-1,n-1]
    for i in range(n-1,-1,-1):
        x[i]=y[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-u[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/u[i,i]
    print('----------L-------')
    print(L)
    print('----------y-------')
    print(y)
    print('----------u-------')
    print(u)
    print('----------x-------')
    print(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
lu1(a,b)
```

☞ Para você fazer

Resolva pelos dois métodos o sistema

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 2 & 2 & 4 & 4 & 42 \\ 7 & 5 & 5 & 5 & 3 & 78 \\ 2 & 1 & 6 & 6 & 4 & 69 \\ 6 & 3 & 3 & 7 & 1 & 61 \\ 5 & 2 & 6 & 5 & 2 & 79 \end{array}\right)$$

e mostre no primeiro método a matriz escalonada e no segundo método as matrizes L e U (pode usar o verso desta folha, além de apresentar os 5 valores do vetor resposta x, que por óbvio devem ser os mesmos em ambos os métodos

x	y	z	w	t