UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 21/04/2019 - 11:35:44.0
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69215 ALLAN MORINAGA 19FFU113 - 1
apos 16/05, 50% _____ / _____ / _____

Problemas de Sistemas Lineares

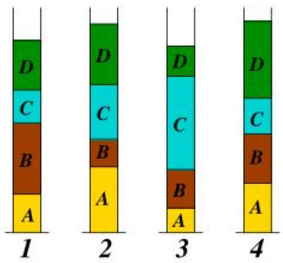
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
37.23	33.36	47.11	50.02
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
7.9	3.3	5.8	2.6
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
9.8	4.5	4.3	1.1
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
10.6	10.2	3.6	6.1
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
7.1	8.5	6.5	4.6

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
.9			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	2	4	5	3	1
2	0	4	6	9	3
3	0	8	2	0	3
4	7	8	4	4	8
5	2	6	8	9	1

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

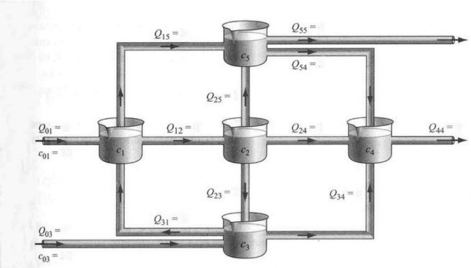
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
186	484	421	421	249

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
17				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

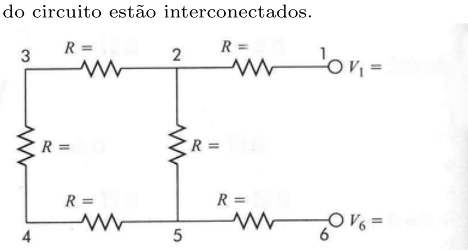
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
19	11	17	18	15
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
14	5	6	13	12
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
16	2	80	50	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
40.72				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 3$, $5 \rightarrow 4$, $6 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 2$ e $1 \rightarrow 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	40	10	25
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
10	20	200	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
4.56					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
8960	8479	8090

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	39	33	28
2	28	36	36
3	39	30	31

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
9240		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69215 - 16/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 21/04/2019 - 11:35:44.0
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69822 ANDREA A ALVES 19FFU113 - 2
apos 16/05, 50% ______ / ______ / ______

Problemas de Sistemas Lineares

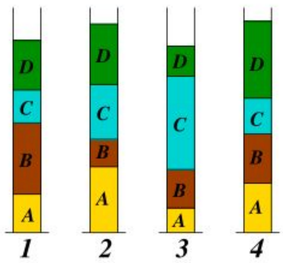
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
69.02	86.64	100.06	77.56
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
10.3	8.8	9.4	1.2
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
3.8	8.1	9.7	9.2
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
9.6	10.4	6.6	7.2
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
2.9	5.9	3.2	10.1

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
2.4			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	1	2	0	7	7
2	5	7	3	8	1
3	2	0	0	8	2
4	5	0	8	4	0
5	7	7	5	3	5

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

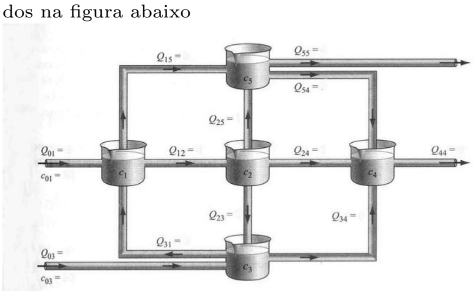
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
268	212	206	399	170

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
8				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

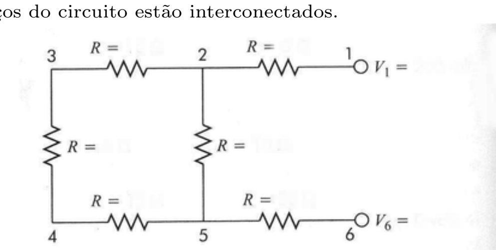
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
14	16	15	18	11
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
19	4	13	20	12
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
5	9	10	30	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
5.98				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	5	10	40
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
15	5	200	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
6.29					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7023	8278	8597

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	36	42	22
2	28	34	38
3	26	30	44

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
6374		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69822 - 16/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 21/04/2019 - 11:35:44.0
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69084 EDSON RODRIGUES VELOSO
19FFU113 - 3 apos 16/05, 50% ______ / ______ /

Problemas de Sistemas Lineares

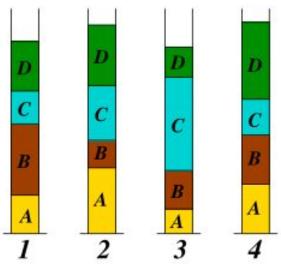
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
47.03	42.21	52.34	30.79
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
5.7	6.6	4.6	3.9
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
6.9	3.6	3.3	6.1
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
4.5	4.0	7.3	11.0
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
2.1	5.9	1.7	1.9

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
2.0			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	8	9	4	2	0
2	5	0	6	7	8
3	8	4	8	4	7
4	2	3	5	7	0
5	3	9	1	9	9

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

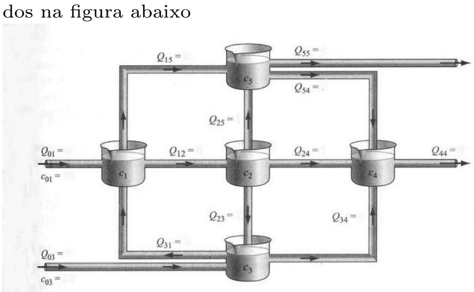
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
155	167	151	204	124

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
8				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$
Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

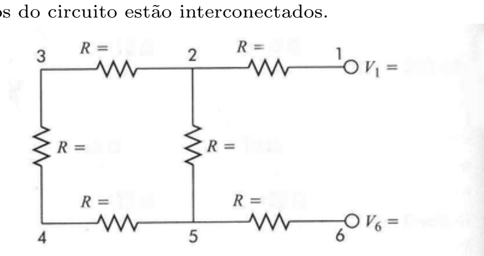
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
17	4	16	6	8
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
13	18	5	14	1
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
3	12	60	10	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
19.85				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
35	35	5	10
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
5	20	50	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
.84					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
6652	8598	5790

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	27	42	31
2	37	41	22
3	33	39	28

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
8970		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69084 - 16/05

Problemas de Sistemas Lineares

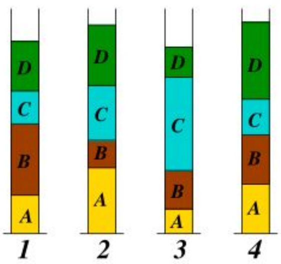
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
61.44	95.51	98.49	44.04
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
1.8	2.4	3.7	9.6
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
5.0	9.3	8.7	9.0
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
4.0	10.0	10.4	8.3
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
1.4	6.2	1.7	7.4

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
2.8			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	1	6	1	5	5
2	0	9	8	5	3
3	9	1	3	8	3
4	9	6	9	3	1
5	0	9	6	3	2

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

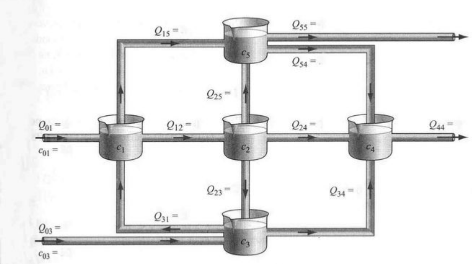
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
323	391	345	358	205

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
17				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$

E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

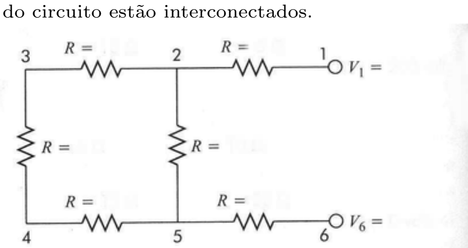
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
10	9	2	4	18
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
17	5	12	14	13
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
1	8	60	70	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
47.99				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
25	15	15	25
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
20	15	250	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
4.57					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
6853	9256	7570

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	26	31	43
2	30	43	27
3	31	44	25

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
8445		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

Problemas de Sistemas Lineares

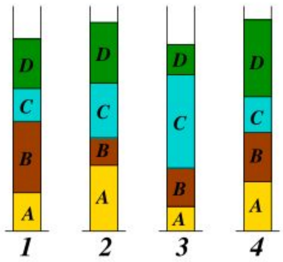
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
41.26	35.08	68.37	50.99
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
6.1	3.6	4.8	10.4
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
3.0	5.6	1.1	9.6
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
9.1	9.4	8.3	8.7
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
5.9	5.5	8.8	8.4

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
1.8			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	5	5	5	0	7
2	6	6	9	8	0
3	0	0	8	5	5
4	1	1	9	9	6
5	3	5	7	0	5

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

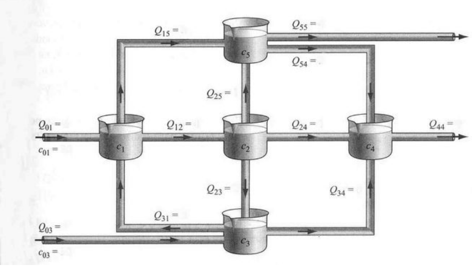
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
233	247	398	214	221

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
19				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + 1r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

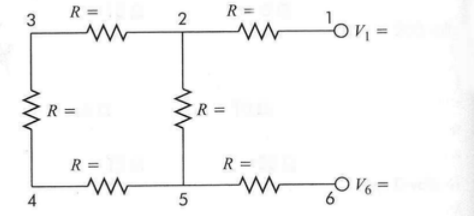
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
1	13	7	4	12
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
8	10	11	17	14
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
16	9	50	40	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
116.76				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	30	40	30
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
25	40	50	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
.67					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
5225	5787	7633

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	28	27	45
2	31	36	33
3	26	31	43

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
6173		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69091 - 16/05

Problemas de Sistemas Lineares

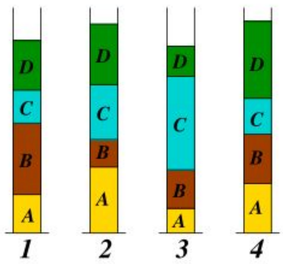
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
61.50	112.86	63.85	90.61
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
5.1	3.2	6.1	2.4
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
8.1	3.7	8.0	10.5
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
6.4	1.8	6.6	1.5
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
5.2	10.7	6.2	7.4

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
4.0			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	7	3	5	6	5
2	2	1	8	1	7
3	0	1	2	1	5
4	1	1	6	8	0
5	3	4	7	5	3

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

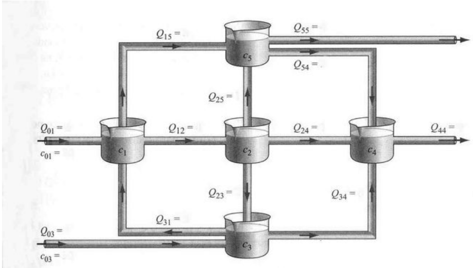
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
206	164	490	362	305

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
13				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$

E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

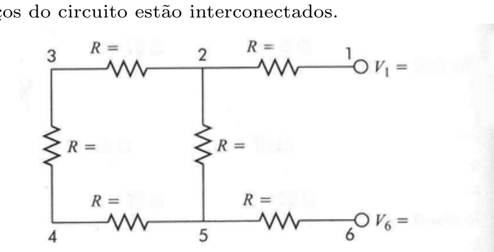
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
6	3	19	7	16
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
12	11	2	9	13
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
15	14	50	10	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
55.12				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
20	30	40	20
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
25	15	250	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
4.58					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
10037	11297	5833

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	39	45	16
2	39	35	26
3	33	45	22

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
8586		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69860 - 16/05

Problemas de Sistemas Lineares

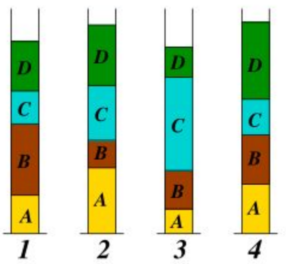
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
70.73	75.44	66.26	65.93
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
10.3	10.7	6.1	3.6
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
7.2	2.9	4.4	10.1
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
7.3	5.1	7.6	3.9
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
5.4	9.7	8.6	2.8

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
2.2			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	4	1	2	1	8
2	4	7	1	7	6
3	2	5	4	8	6
4	1	8	7	4	6
5	0	5	2	0	8

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

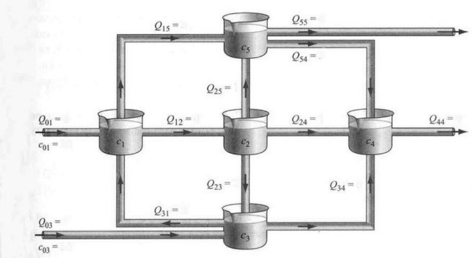
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
111	233	118	207	312

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
8				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$

E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

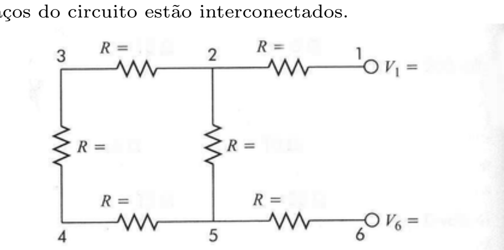
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
5	13	11	12	4
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
20	2	19	17	6
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
16	3	50	20	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
14.37				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
40	20	25	10
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
40	15	100	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
1.28					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7231	8452	8196

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	30	37	33
2	28	38	34
3	32	32	36

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
9752		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69103 - 16/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 21/04/2019 - 11:35:44.0
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69110 GABRIEL MELEK DOS SANTOS
19FFU113 - 8 apos 16/05, 50% ______ / ______ /

Problemas de Sistemas Lineares

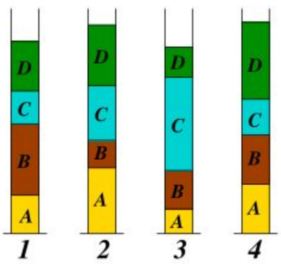
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
45.79	52.54	45.56	53.94
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
9.3	4.6	2.7	1.5
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
5.1	2.0	6.4	10.9
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
3.1	4.5	5.9	8.1
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
4.4	3.0	8.0	9.4

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
3.0			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	7	9	6	6	7
2	6	7	6	8	2
3	6	5	3	9	5
4	7	2	5	1	5
5	6	0	3	8	0

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

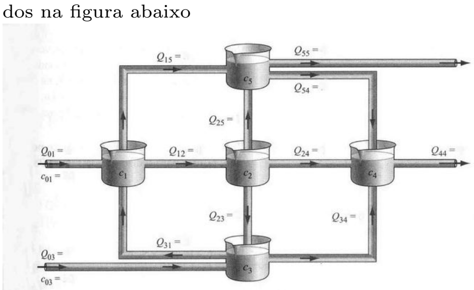
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
418	320	317	407	244

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
15				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

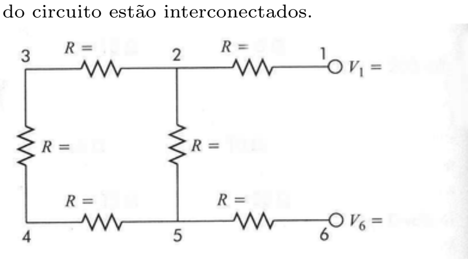
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
15	13	16	7	1
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
10	9	4	2	17
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
11	5	30	70	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
8.28				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	25	15	30
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
35	5	200	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
4.62					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7271	7242	8336

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	37	31	32
2	32	31	37
3	27	33	40

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
7122		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69110 - 16/05

Problemas de Sistemas Lineares

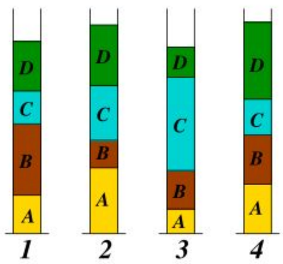
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materiais estão dispostos em camadas, não misturados, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
32.35	34.02	38.26	30.61
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
10.7	7.2	4.1	3.6
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
8.7	1.6	3.4	5.2
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
8.9	1.7	5.0	5.6
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
7.3	9.6	2.2	4.3

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
.8			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	2	8	0	4	3
2	4	6	9	7	3
3	4	1	7	3	0
4	1	5	2	9	7
5	2	7	3	9	9

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

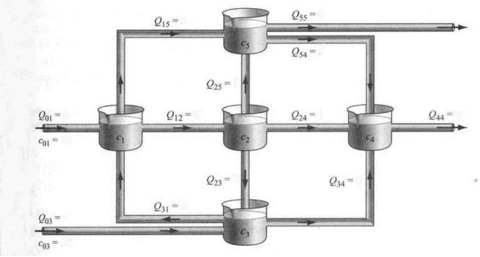
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
58	137	63	113	74

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
12				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$

E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

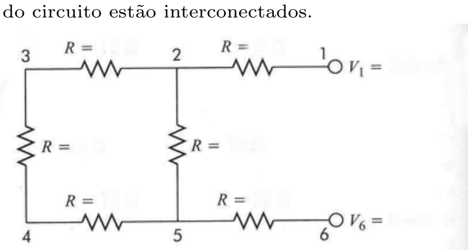
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
5	12	18	16	4
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
6	1	2	11	13
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
20	7	80	20	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
45.21				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	35	30	30
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
25	15	300	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
6.03					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
6195	7796	5481

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	31	44	25
2	34	38	28
3	30	37	33

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
7445		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

Problemas de Sistemas Lineares

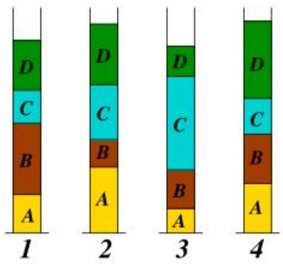
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
18.15	12.52	16.05	10.96
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
8.4	7.4	4.7	11.0
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
9.3	7.8	3.1	5.0
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
9.0	8.7	6.8	3.5
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
7.2	5.4	5.6	1.2

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
.1			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	6	5	1	6	8
2	5	9	3	4	0
3	8	8	0	3	8
4	1	5	4	7	3
5	2	8	6	3	2

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

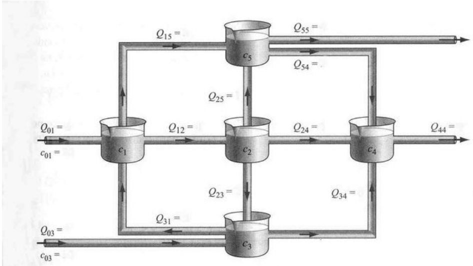
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
57	106	53	79	63

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
3				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

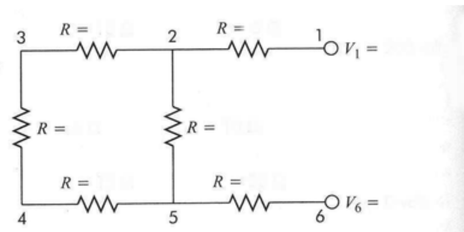
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
17	2	16	8	5
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
15	1	4	7	19
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
20	10	80	10	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
15.77				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
35	25	15	35
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
25	15	200	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
2.91					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7794	9208	7536

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	26	41	33
2	39	45	16
3	33	27	40

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
9976		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69134 - 16/05

Problemas de Sistemas Lineares

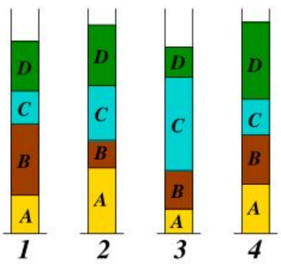
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
81.69	57.14	58.71	90.17
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
8.3	2.6	8.8	10.1
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
7.1	2.9	3.6	4.6
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
2.2	9.3	6.1	5.1
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
10.0	10.9	7.6	2.5

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
4.4			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	3	7	3	7	5
2	5	2	9	4	7
3	8	6	9	8	6
4	8	1	5	9	0
5	9	4	1	1	0

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

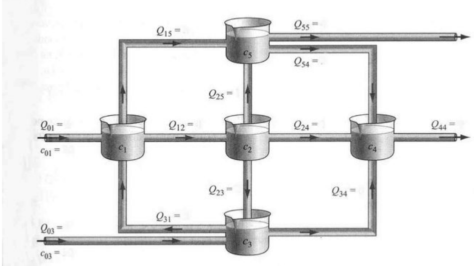
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
195	161	148	170	132

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
13				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada.

Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

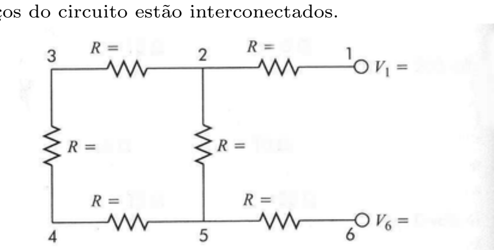
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
15	13	20	3	12
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
1	9	6	14	17
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
10	4	80	40	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
65.18				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
5	40	5	30
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
15	15	250	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
7.69					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
8017	9271	9031

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	32	34	34
2	26	39	35
3	33	33	34

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
8952		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69141 - 16/05

Problemas de Sistemas Lineares

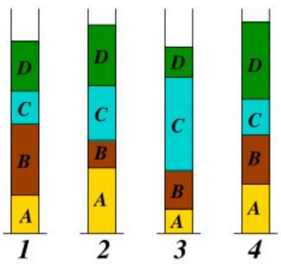
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
36.77	22.01	38.12	23.53
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
10.1	8.3	7.9	3.2
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
5.3	3.7	5.4	2.8
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
4.1	9.6	10.9	10.2
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
9.7	4.0	1.2	5.5

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
1.6			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	4	8	4	8	7
2	6	5	5	2	0
3	0	2	8	2	1
4	3	0	0	1	7
5	3	5	8	2	5

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

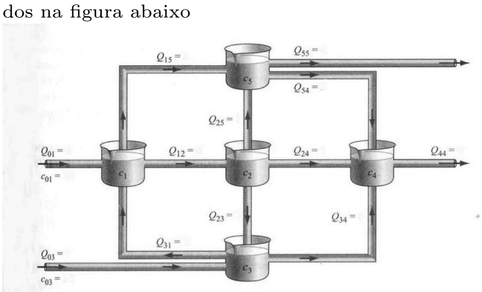
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
206	274	230	214	224

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
20				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

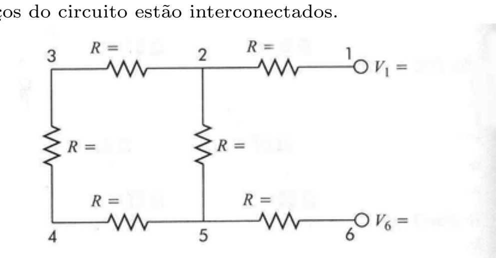
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
11	5	12	14	10
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
13	7	16	3	20
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
4	17	50	60	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
26.24				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	15	5	40
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
20	10	250	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
6.25					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
8029	10715	8146

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	27	44	29
2	31	37	32
3	32	38	30

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
9755		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

Problemas de Sistemas Lineares

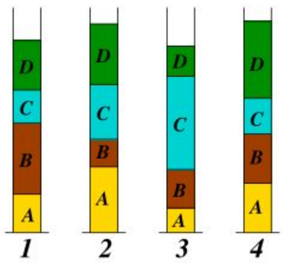
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
46.37	59.96	52.50	44.25
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
3.4	10.4	6.2	4.5
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
7.2	9.8	8.9	9.2
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
9.5	8.7	2.4	8.3
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
5.9	7.3	5.5	6.8

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
1.1			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	1	8	6	2	9
2	3	5	5	1	6
3	9	9	3	0	0
4	9	4	1	8	5
5	6	3	3	9	8

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

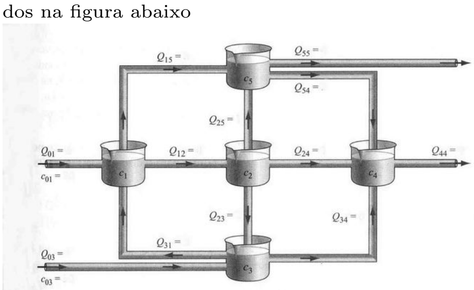
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
340	381	220	217	321

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
16				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + 1r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

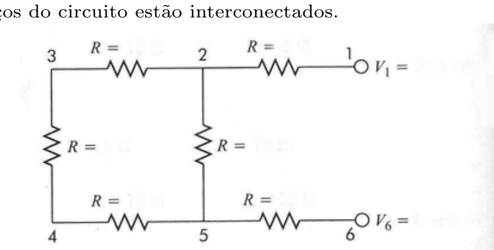
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
9	12	8	16	17
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
6	5	2	15	1
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
10	18	30	10	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
47.88				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
5	35	40	30
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
15	20	50	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
1.31					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7077	7697	8744

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	26	30	44
2	29	34	37
3	37	35	28

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
9139		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 21/04/2019 - 11:35:44.0
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69877 ISABELA CASTILHO STIVAL
19FFU113 - 14 apos 16/05, 50% ______ / / ______

Problemas de Sistemas Lineares

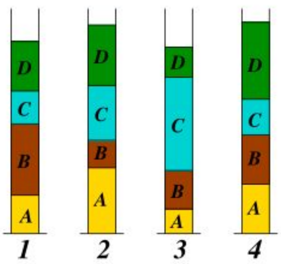
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
102.62	71.05	104.69	95.22
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
8.9	8.2	2.4	5.7
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
4.9	3.9	1.5	10.6
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
5.9	4.8	6.7	10.8
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
8.0	4.3	4.6	7.4

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
4.8			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	1	0	3	1	7
2	0	2	2	3	9
3	0	4	8	3	3
4	0	5	4	2	7
5	2	5	2	0	2

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

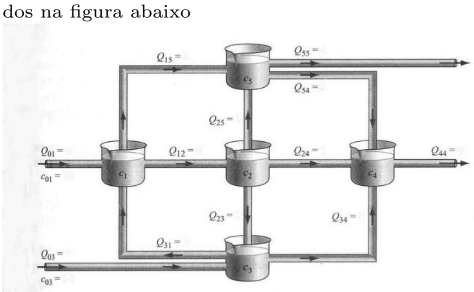
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
45	214	185	99	346

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
7				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

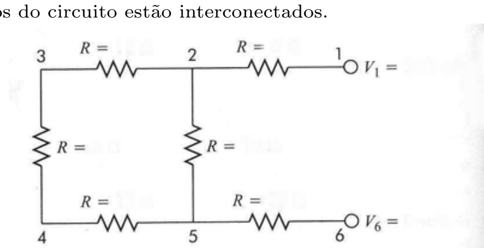
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
19	8	16	14	4
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
11	3	1	17	2
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
6	18	40	80	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
23.63				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
25	10	25	35
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
15	40	150	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
1.94					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
8322	7862	6819

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	35	30	35
2	33	35	32
3	40	36	24

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
5554		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69877 - 16/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 21/04/2019 - 11:35:44.0
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69246 MAURICIO KOBAY DO AMARAL
19FFU113 - 15 apos 16/05, 50% ______ / / ______

Problemas de Sistemas Lineares

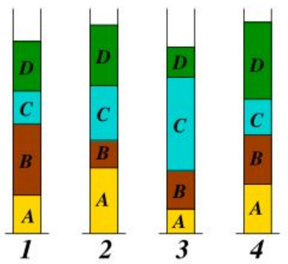
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
15.04	10.47	9.98	14.44
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
7.0	10.7	9.0	4.5
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
7.5	8.4	6.7	2.1
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
2.4	4.6	3.9	5.0
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
6.8	11.0	6.6	5.2

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
.3			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	1	2	6	6	1
2	0	6	2	9	6
3	4	2	5	0	8
4	0	1	6	0	2
5	0	8	7	2	2

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

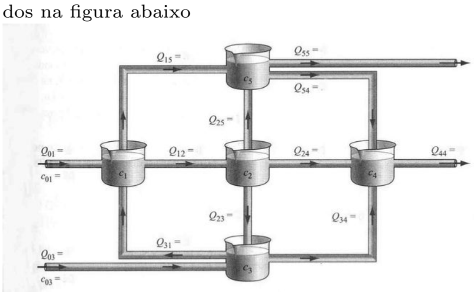
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
44	239	332	298	222

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
20				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

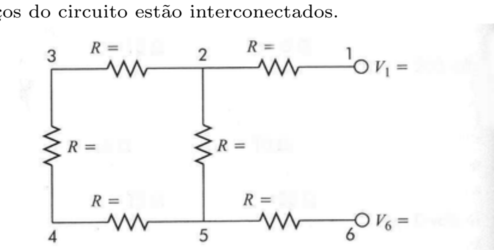
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
4	1	18	3	7
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
8	10	20	15	5
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
12	2	20	10	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
16.17				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 3$, $5 \rightarrow 4$, $6 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 2$ e $1 \rightarrow 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
30	5	35	30
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
5	35	150	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
2.15					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7544	8450	7415

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	32	36	32
2	39	31	30
3	26	41	33

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
6921		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69246 - 16/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 21/04/2019 - 11:35:44.0
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69253 PEDRO HENNIG 19FFU113 - 16 apos 16/05, 50% ______ / ______ / ______

Problemas de Sistemas Lineares

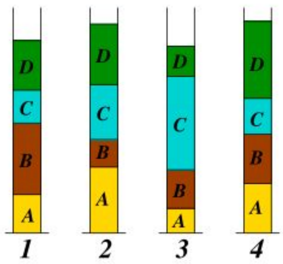
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
37.40	48.74	62.99	49.16
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
4.6	4.7	5.7	6.1
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
1.6	10.9	8.3	7.7
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
8.7	7.4	9.3	10.2
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
11.0	2.9	4.8	9.6

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
1.5			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	8	7	2	8	7
2	3	3	7	0	0
3	3	5	3	7	1
4	0	6	2	6	6
5	8	2	1	7	0

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

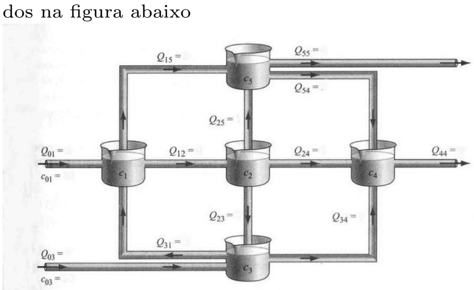
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
205	100	120	161	15

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
1				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

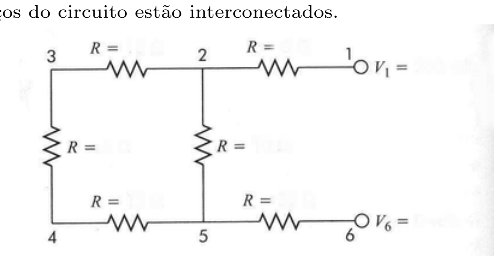
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
5	6	10	18	17
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
13	11	19	20	3
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
8	12	50	60	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
89.71				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 3$, $5 \rightarrow 4$, $6 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 2$ e $1 \rightarrow 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
40	25	25	35
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
10	40	250	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
2.81					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
8042	7923	4825

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	40	39	21
2	40	32	28
3	36	44	20

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
6408		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69253 - 16/05

Problemas de Sistemas Lineares

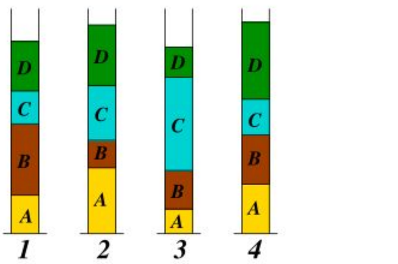
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materiais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
50.18	39.40	35.09	46.97
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
7.9	7.4	1.8	6.8
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
6.7	4.4	3.2	4.3
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
2.3	3.4	5.5	10.8
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
6.9	8.5	9.2	3.7

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
3.8			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	8	0	8	8	6
2	9	7	7	8	7
3	8	3	8	1	2
4	5	5	1	5	9
5	6	1	4	0	5

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

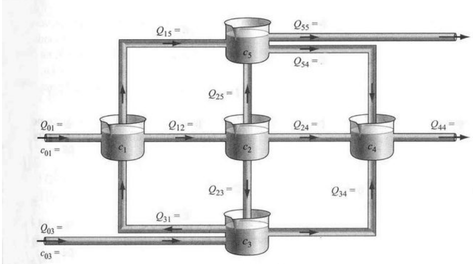
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
541	264	397	364	481

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
14				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$
Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

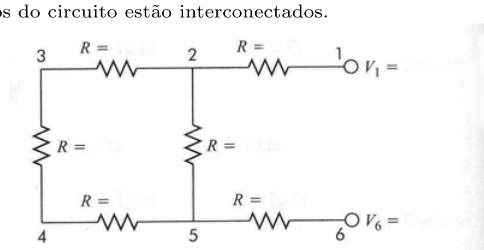
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
13	10	12	3	2
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
20	15	8	14	5
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
4	18	80	30	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
9.71				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	15	5	35
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
25	20	200	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
3.83					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7678	8245	7982

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	28	28	44
2	30	34	36
3	38	41	21

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
7664		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

Problemas de Sistemas Lineares

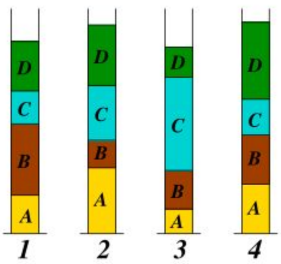
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materiais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
51.44	87.49	65.56	40.15
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
3.8	3.2	3.0	9.0
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
7.6	6.2	10.0	6.9
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
9.6	3.3	4.0	1.8
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
4.9	8.5	2.0	3.1

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
5.0			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	8	1	5	6	8
2	2	9	8	0	9
3	2	5	9	3	5
4	3	7	1	2	9
5	0	4	8	0	5

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

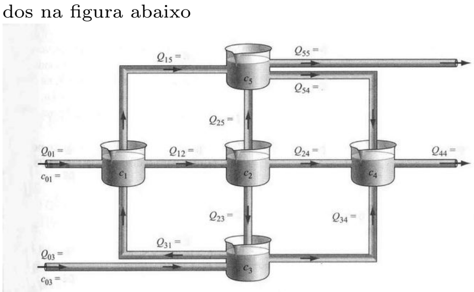
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
185	353	394	141	462

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
10				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtém-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

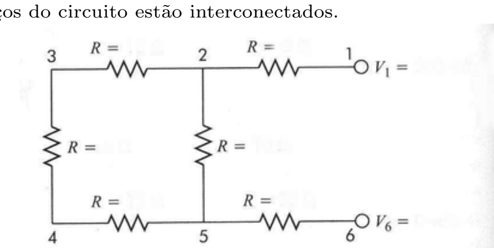
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
3	17	12	19	4
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
20	16	7	14	5
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
13	11	10	70	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
34.90				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
25	25	35	35
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
40	5	50	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
.86					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7385	7965	10332

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	28	33	39
2	27	32	41
3	33	26	41

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
9894		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 21/04/2019 - 11:35:44.0
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69189 WILSON DE MELO 19FFU113 - 19 apos 16/05, 50% _____ / _____ / _____

Problemas de Sistemas Lineares

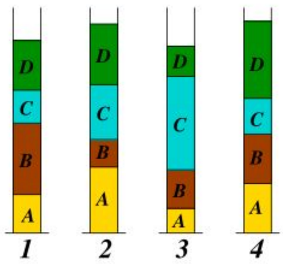
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
80.61	104.13	61.41	110.24
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
5.7	2.1	6.5	7.5
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
11.0	4.5	5.9	5.4
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
1.1	7.1	1.9	8.4
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
9.3	8.5	3.6	8.3

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
4.8			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	7	0	4	1	6
2	8	9	9	0	1
3	7	5	5	5	3
4	6	3	7	3	9
5	9	2	2	3	4

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

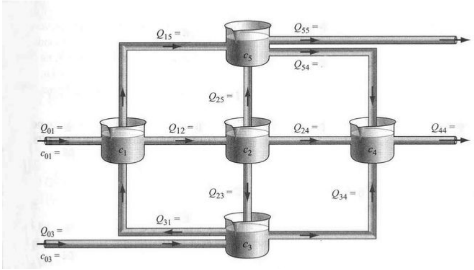
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
430	199	307	127	285

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
14				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

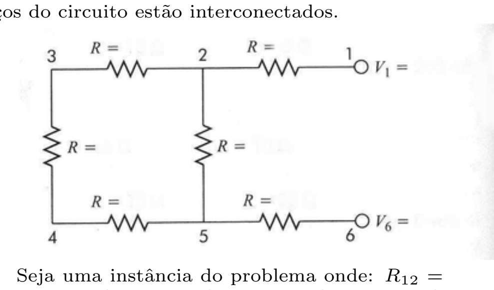
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
19	20	10	2	1
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
18	4	16	6	5
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
12	9	30	50	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
13.32				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	35	25	20
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
35	15	150	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
2.76					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
5636	6819	8002

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	32	29	39
2	26	31	43
3	26	39	35

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
5282		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

113-69189 - 16/05