Problemas de Sistemas Lineares

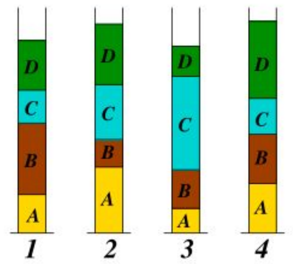
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
85.20	51.96	42.36	60.96
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
9.7	6.2	6.6	10.1
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
6.3	1.7	8.4	4.6
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
2.2	3.2	4.2	9.2
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
4.5	6.9	7.0	3.0

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
3.3			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	6	7	9	7	5
2	5	3	3	4	1
3	5	0	1	7	1
4	1	9	0	3	9
5	8	2	8	8	7

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

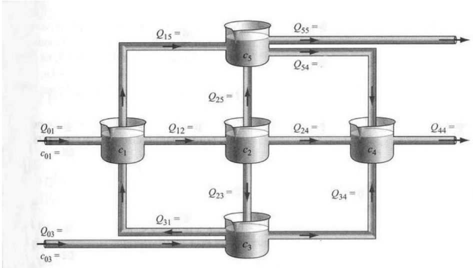
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
256	276	232	297	255

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
15				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
14	15	19	11	12

Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
8	6	16	7	1

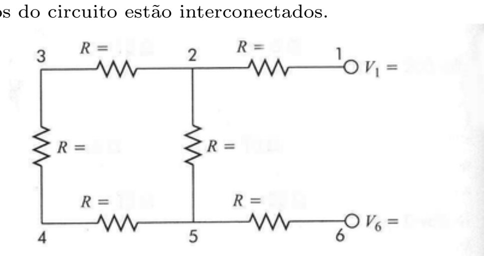
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
5	13	70	80	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
61.08				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 3$, $5 \rightarrow 4$, $6 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 2$ e $1 \rightarrow 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
30	30	10	15
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
35	5	50	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
.89					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
6504	5585	5901

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	39	30	31
2	37	36	27
3	33	28	39

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
5873		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-68993 - 23/04

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/03/2019 - 19:07:58.8
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69789 BRUNO V GUIMARARES 19FCN111 - 2 apos 23/04, 50% _____ / _____ / _____

Problemas de Sistemas Lineares

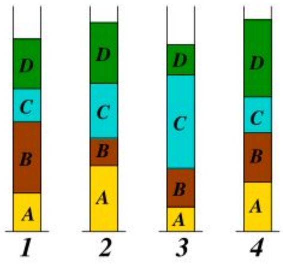
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
80.75	48.60	65.95	78.28
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
8.4	7.6	5.7	9.8
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
7.7	6.1	1.6	3.1
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
3.0	10.1	3.3	10.2
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
6.8	8.3	6.0	8.0

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
2.4			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	9	1	5	8	8
2	9	9	9	6	0
3	5	1	4	9	4
4	7	3	3	7	2
5	3	1	5	2	0

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

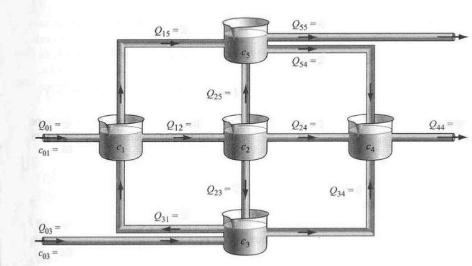
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
242	150	245	187	40

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
3				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

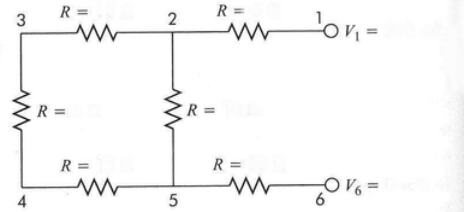
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
10	19	13	9	3
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
14	7	15	17	16
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
18	12	50	10	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
10.86				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
30	15	20	30
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
20	30	100	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
1.33					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
5710	6374	6557

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	31	29	40
2	26	45	29
3	35	28	37

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
5851		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69789 - 23/04

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/03/2019 - 19:07:58.8
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69008 EDUARDO SCARANTE DEMCZUK 19FCN111 - 3 apos 23/04, 50% ______ / ______ /

Problemas de Sistemas Lineares

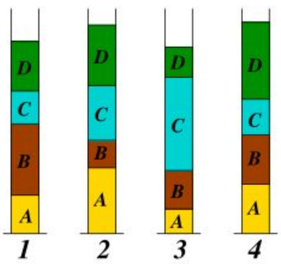
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materiais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
23.44	61.92	49.06	73.98
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
2.5	2.3	6.1	1.6
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
7.0	3.6	6.8	8.4
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
6.6	3.4	2.7	5.3
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
8.5	4.8	7.7	9.3

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
2.8			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	9	7	9	2	2
2	3	0	1	2	7
3	2	1	1	4	9
4	1	3	5	3	5
5	7	2	1	6	9

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

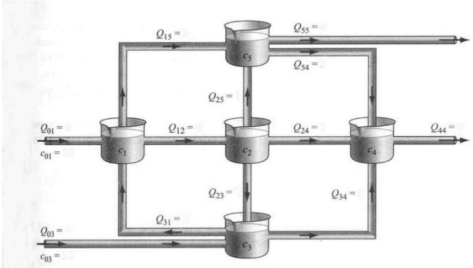
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
156	76	100	171	361

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
3				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$

E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

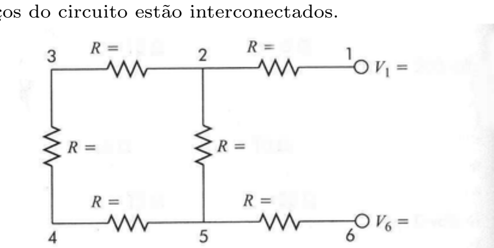
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
8	6	3	19	12
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
5	16	2	1	13
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
4	14	60	80	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
68.53				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	40	30	15
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
10	35	200	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
3.39					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7525	8884	5934

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	35	45	20
2	39	43	18
3	27	32	41

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
6457		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69008 - 23/04

Problemas de Sistemas Lineares

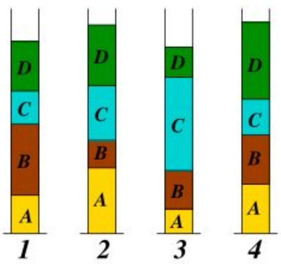
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
33.11	66.41	54.50	30.08
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
3.0	3.8	1.1	5.0
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
4.6	1.5	9.0	10.1
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
3.9	4.5	2.0	8.8
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
8.6	1.2	4.4	2.8

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
1.2			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	2	1	2	7	3
2	1	1	6	9	4
3	6	4	1	7	7
4	8	7	5	7	6
5	3	5	9	7	0

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

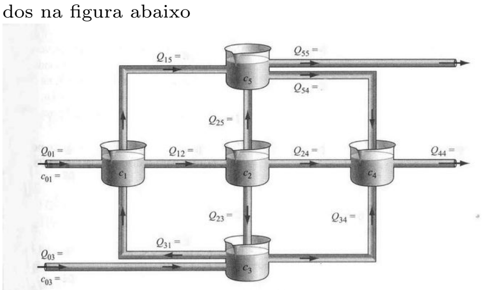
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
286	265	293	444	245

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
10				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
3	16	4	7	15

Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
11	20	14	10	6

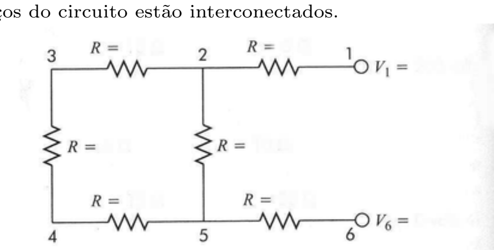
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
18	1	60	70	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
79.56				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
25	35	35	5
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
15	35	100	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
1.38					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7661	7262	7639

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	27	42	31
2	40	26	34
3	32	31	37

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
6903		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69015 - 23/04

Problemas de Sistemas Lineares

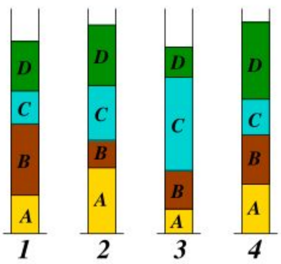
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materiais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
67.51	106.74	128.11	97.88
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
3.3	1.6	8.8	2.0
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
10.2	10.3	2.5	5.5
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
3.6	9.8	9.9	6.7
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
7.0	5.3	7.4	4.9

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
2.7			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	1	3	8	4	6
2	8	1	6	7	9
3	8	8	3	2	5
4	4	9	2	1	1
5	4	1	9	4	1

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

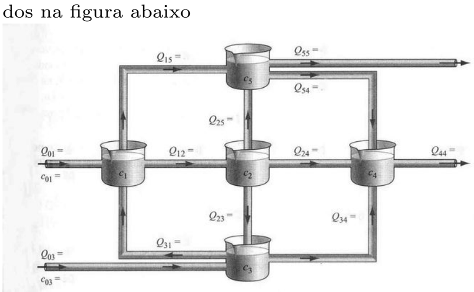
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
237	156	215	169	248

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
9				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$

E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

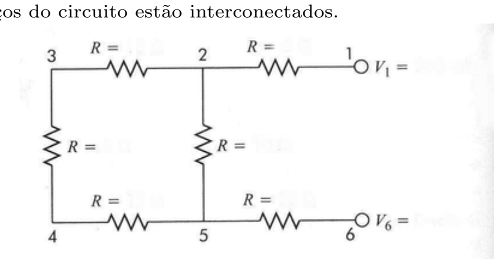
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
17	6	18	1	19
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
4	20	12	16	7
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
14	3	60	40	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
63.86				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
25	40	10	40
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
35	40	250	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
2.77					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7235	7451	6996

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	34	39	27
2	33	27	40
3	33	37	30

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
8002		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69022 - 23/04

Problemas de Sistemas Lineares

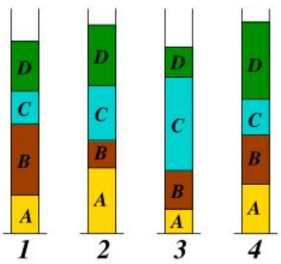
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
77.53	69.27	72.90	52.51
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
9.9	10.6	9.4	8.2
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
10.8	5.3	7.0	9.8
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
3.0	8.4	5.8	9.7
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
10.9	7.9	5.9	5.0

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
.3			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	9	5	4	4	3
2	8	5	1	6	6
3	0	9	4	9	4
4	2	6	8	6	3
5	9	2	1	4	8

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

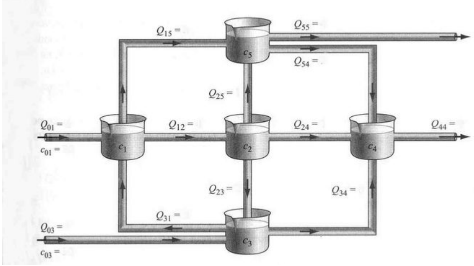
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
402	326	225	375	355

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
6				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + 1r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

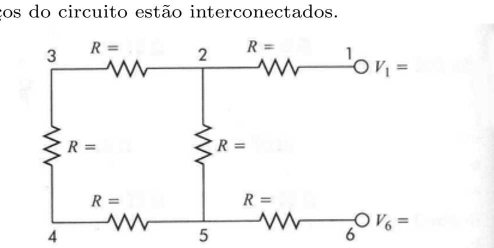
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
3	5	19	16	11
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
10	12	4	18	20
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
7	1	60	80	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
53.59				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	15	30	20
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
35	15	300	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
5.69					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
8238	8242	8246

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	31	27	42
2	34	41	25
3	35	32	33

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
8338		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

Problemas de Sistemas Lineares

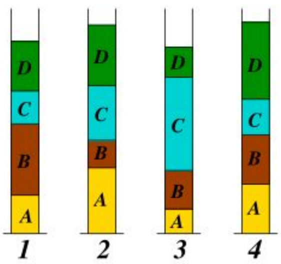
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
54.30	49.33	21.38	65.67
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
2.4	6.1	9.4	9.3
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
3.5	5.1	1.4	7.6
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
1.9	1.2	6.3	4.6
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
1.6	9.5	7.9	8.9

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
3.3			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	1	5	5	5	0
2	6	6	0	2	7
3	3	2	2	6	9
4	0	5	5	8	8
5	6	1	4	1	9

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

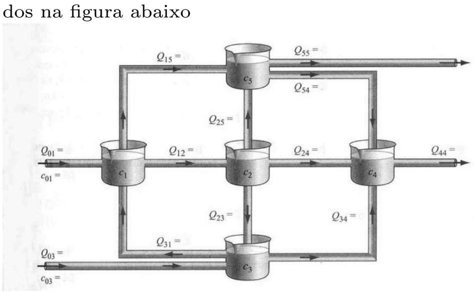
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
120	260	182	260	262

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
18				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
9	2	3	4	18

Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
8	6	19	15	13

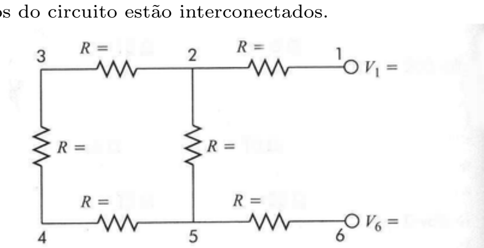
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
7	14	10	80	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
32.41				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
30	35	25	10
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
10	5	200	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
4.57					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7979	8612	10115

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	30	26	44
2	26	28	46
3	34	44	22

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
9365		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69039 - 23/04

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/03/2019 - 19:07:58.8
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69046 MARCELL ANDREY MACHADO PINTO 19FCN111 - 8 apos 23/04, 50% ______ / / ______

Problemas de Sistemas Lineares

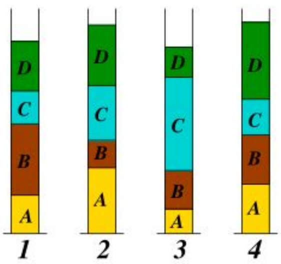
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ Para você fazer

m_1	m_2	m_3	m_4
72.56	85.40	101.39	107.36
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
6.1	3.8	7.5	6.2
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
8.2	7.2	1.6	7.4
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
11.0	9.6	4.9	6.0
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
7.9	10.5	2.2	10.0

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
3.3			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ Para você fazer

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	3	6	4	0	4
2	9	0	8	9	4
3	4	0	6	1	8
4	7	5	6	0	5
5	1	1	7	5	5

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

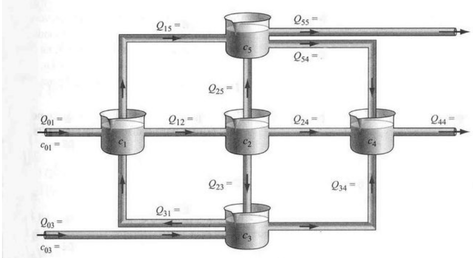
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
243	124	263	88	232

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
6				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ Para você fazer

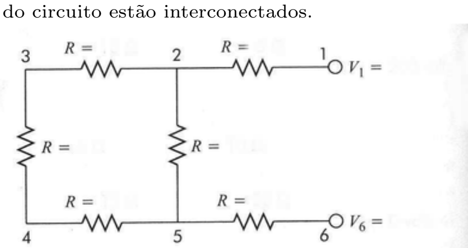
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
12	20	7	3	5
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
6	19	11	8	15
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
16	2	50	40	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
18.26				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ Para você fazer

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
30	10	15	5
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
10	10	250	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
5.26					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ Para você fazer

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
9146	9822	5990

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	34	42	24
2	37	35	28
3	38	42	20

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
6095		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69046 - 23/04

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/03/2019 - 19:07:58.8
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69060 MELISSA SCHELLIN BECKER
19FCN111 - 9 apos 23/04, 50% ______ / ______ /

Problemas de Sistemas Lineares

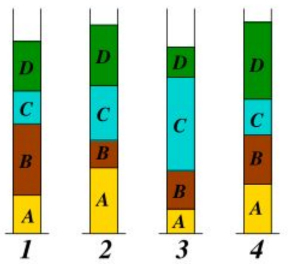
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
25.44	46.23	19.48	15.79
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
8.0	3.4	5.2	1.9
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
6.1	5.6	11.0	4.8
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
1.5	5.5	3.1	10.4
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
5.3	7.6	2.3	3.3

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
.7			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	0	0	1	9	4
2	3	8	4	0	9
3	6	5	3	2	3
4	6	7	6	5	6
5	3	4	0	7	8

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

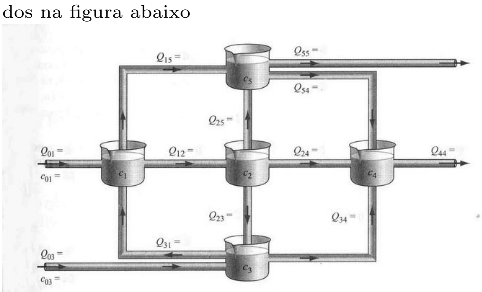
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
210	286	159	244	349

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
3				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada.
Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

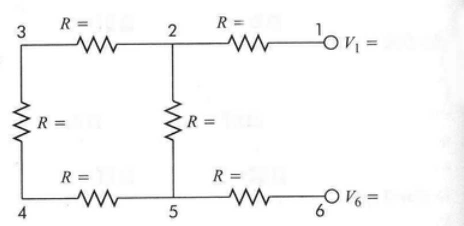
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
5	10	12	8	9
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
20	7	4	15	19
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
17	2	80	30	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
31.96				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
15	30	20	40
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
30	5	200	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
4.71					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
8584	8155	6916

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	33	38	29
2	37	32	31
3	39	34	27

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3M.1$	$m^3M.2$	$m^3M.3$
7539		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69060 - 23/04

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/03/2019 - 19:07:58.8
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69077 TAYANE CORDEIRO FARIA
19FCN111 - 10 apos 23/04, 50% ______ / / ______

Problemas de Sistemas Lineares

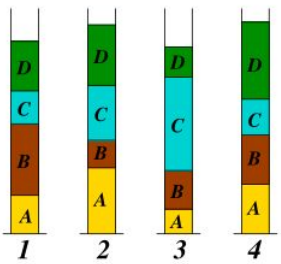
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materiais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
101.19	67.98	95.60	73.23
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
9.0	10.5	8.0	4.7
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
2.5	5.0	3.6	9.2
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
8.8	2.1	10.7	8.5
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
9.5	2.6	1.2	8.9

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
3.0			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	6	9	5	4	6
2	3	0	2	1	0
3	9	7	5	5	6
4	8	6	4	7	6
5	6	2	5	9	8

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

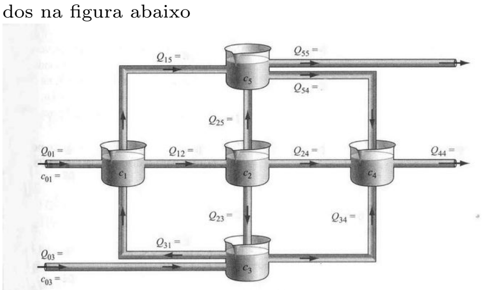
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
399	249	245	325	310

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
1				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

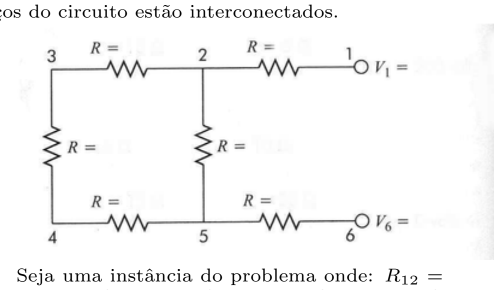
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
15	13	4	8	20
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
7	1	2	9	5
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
11	12	50	80	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
83.01				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
10	25	10	10
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
20	25	150	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
3.07					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
6229	6897	7928

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	32	29	39
2	27	28	45
3	29	45	26

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
8746		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69077 - 23/04

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 31/03/2019 - 19:07:58.8
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Problemas de Sistemas Lineares VIVO744a, V: 1.03 69796 THONNY G FERRAZ 19FCN111 - 11 apos 23/04, 50% _____ / _____ / _____

Problemas de Sistemas Lineares

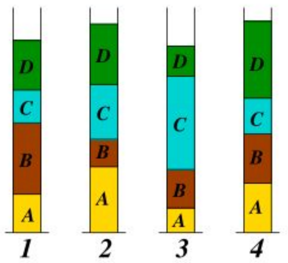
De nada adianta estudar a maneira de resolver problemas lineares, se este estudo não for posto à prática, trabalhando com problemas minimamente reais tirados das engenhárias clássicas, a saber: química, de produção, elétrica e civil.

1. Materiais Particulados

Suponha 4 tipos de materiais particulados distribuídos em 4 provetas e em cada proveta os materais estão dispostos em camadas, não misturadas, de modo que é possível medir o volume de cada material em cada uma das provetas. Chamando os materiais de A, B, C e D e suas densidades de ρ_A, ρ_B, ρ_C e ρ_D estas são as incógnitas que queremos achar. Os dados disponíveis são:

incógnita	significado
m_1	massa da proveta 1
m_2	massa da proveta 2
m_3	massa da proveta 3
m_4	massa da proveta 4
v_{im}	volume material m na proveta i

Veja-se uma visualização do que se fala



Deve-se lembrar que a massa de material A na proveta 1 é $v_{1A} \times \rho_A$, e assim por diante para todos os materiais. Assim, a massa total na proveta 1 é

$$v_{1A}.\rho_A + v_{1B}.\rho_B + v_{1C}.\rho_C + v_{1D}.\rho_D = m_1$$

Considerando as 4 provetas tem-se 4 equações a 4 incógnitas. Monte e resolva o problema prático:

☞ **Para você fazer**

m_1	m_2	m_3	m_4
40.33	42.45	70.64	37.45
v_{1A}	v_{1B}	v_{1C}	v_{1D}
6.0	4.9	4.5	2.9
v_{2A}	v_{2B}	v_{2C}	v_{2D}
2.0	7.9	3.9	8.1
v_{3A}	v_{3B}	v_{3C}	v_{3D}
6.3	4.2	10.9	1.8
v_{4A}	v_{4B}	v_{4C}	v_{4D}
9.8	7.1	2.1	6.5

Responda aqui:

ρ_A	ρ_B	ρ_C	ρ_D
.8			

2. Transportando máquinas

Extraído de [Fra07], pág. 166. Uma transportadora possui 5 tipos de caminhões, que são equipados para transportar cinco tipos diferentes de máquinas A, B, C, D e E. Na tabela a seguir, o que cada tipo de caminhão pode levar a carga plena. Se a linha (1), significando caminhão do tipo 1, tiver A=1, B=1, C=1, D=0, E=2 significa que quando totalmente carregado ele pode levar essas quantidades de cada máquina sem sobrar espaço.

☞ **Para você fazer**

caminhão	máq A	máq B	máq C	máq D	máq E
1	3	0	5	3	0
2	5	9	1	0	9
3	5	6	9	8	7
4	6	9	7	4	9
5	8	4	2	8	8

A pergunta é quantos caminhões de cada tipo deve-se usar para transportar exatamente as seguintes quantidades de cada tipo de máquina a carga plena.

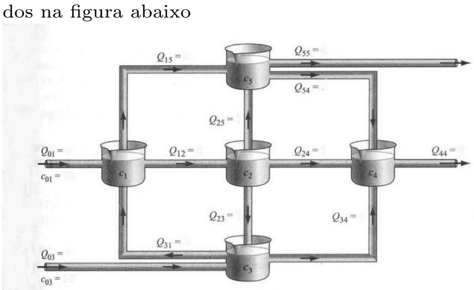
maq.A	m.B	m.C	m.D	maq.E
276	288	217	188	327

Responda aqui:

c.t.1	c.t.2	c.t.3	c.t.4	c.t.5
16				

3. Reatores

Extraído de [Cha13], pág. 227. Cinco reatores acoplados por tubos estão ilustrados na figura abaixo



Seja uma instância do problema na qual os valores são $Q_{15} = 5$, $Q_{55} = 4$, $Q_{54} = 2$, $Q_{25} = 1$, $Q_{01} = 6$, $Q_{12} = 4$, $Q_{24} = 1$, $Q_{44} = 9$, $Q_{23} = 2$, $Q_{34} = 6$, $Q_{31} = 3$, $Q_{03} = 7$, $C_{01} = 20$ e $C_{03} = 50$. A taxa de de fluxo de massa através de cada tubo é calculada como o produto de fluxo (Q) pela concentração (c). Em regime permanente ou seja, estacionário, o fluxo de massa para dentro e para fora de cada reator deve ser igual. Neste exemplo, os balanços de massa podem ser escritos como

reator 1 $6 \times 20 + 3 \times r_3 = 5 \times r_1 + 4 \times r_1$
reator 2 $4 \times r_1 = r_2 + r_2 + 2 \times r_2 = 4 \times r_2$
reator 3 $2 \times r_2 + 7 \times 50 = 3 \times r_3 + 6 \times r_3$
reator 4 $r_2 + 2 \times r_5 + 6 \times r_3 = 9 \times r_4$
reator 5 $r_2 + 5 \times r_1 = 4 \times r_5 + 2 \times r_5$

Daqui:
Para o reator 1: $120 + 3.r_3 = 9.r_5$
Reator 2: $r_1 = r_2$
Reator 3: $2.r_2 + 350 = 9.r_3$
Reator 4: $r_2 + 2.r_5 + 6.r_3 = 9.r_4$
Reator 5: $r_2 + 5.r_1 = 6.r_5$
E daqui:
Reator 1: $9r_1 + 0r_2 - 3r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 120$
Reator 2: $r_1 - r_2 + 0r_3 + 0r_4 + 0r_5 = 0$
Reator 3: $0r_1 + 2r_2 - 9r_3 + 0r_4 + 0r_5 = -350$
Reator 4: $0r_1 + 1r_2 + 6r_3 - 9r_4 + 2r_5 = 0$
Reator 5: $5r_1 + r_2 + 0r_3 + 0r_4 - 6r_5 = 0$
E resolvendo obtem-se $r_1 = 28$, $r_2 = 28$, $r_3 = 45.2$, $r_4 = 42.7$ e $r_5 = 42.6$ que é a resposta procurada. Simplificando e resolvendo, deve-se notar que o sistema é esparso (muitos zeros) o que eventualmente impede de usar o algoritmo ingênuo de Gauss. Se for o caso, use as ferramentas estudadas (APL, Maple, Freemat, pacote Numpy do Python ...)

☞ **Para você fazer**

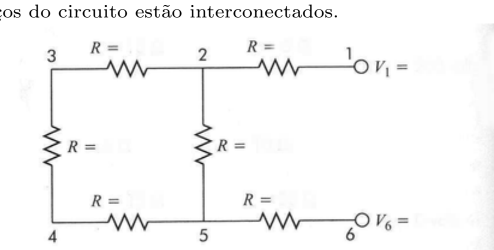
Q_{15}	Q_{55}	Q_{54}	Q_{25}	Q_{01}
1	13	12	4	20
Q_{12}	Q_{24}	Q_{44}	Q_{23}	Q_{34}
15	11	7	14	2
Q_{03}	Q_{31}	c_{01}	c_{03}	xxx
16	18	70	80	xxx

Responda aqui: (concentração de cada reator)

c.r.1	c.r.2	c.r.3	c.r.4	c.r.5
269.12				

4. Circuito Elétrico

Extraído de [Cha13], pág. 224. A lei das tensões especifica que a soma algébrica das quedas de tensão (ou das diferenças de potencial) em qualquer caminho fechado deve ser igual a zero. Usando também a lei de Ohm ($V = ri$) obtém-se um sistema de equações algébricas lineares simultâneas porque os vários laços do circuito estão interconectados.



Seja uma instância do problema onde: $R_{12} = 5\Omega$, $R_{23} = 10\Omega$, $R_{34} = 5\Omega$, $R_{45} = 15\Omega$, $R_{25} = 10\Omega$ e $R_{56} = 20\Omega$ e $V_1 = 200V$ e $V_6 = 0V$.

Assumindo os sentidos positivos como $3 \to 2$, $4 \to 3$, $5 \to 4$, $6 \to 5$, $5 \to 2$ e $1 \to 2$ (se o resultado der negativo, basta inverter o sentido). Aplicando a lei de Kirchhoff tem-se
nodo 2: $i_{12} + i_{52} + i_{32} = 0$
nodo 5: $i_{65} - i_{52} - i_{54} = 0$
nodo 3: $i_{43} - i_{32} = 0$
nodo 4: $i_{54} - i_{43} = 0$
Aplicando a lei das tensões a cada um dos laços, tem-se
$-i_{54}.R_{54} - i_{43}.R_{43} - i_{32}.R_{32} + i_{52}.R_{52} = 0$
$-i_{65}.R_{65} - i_{52}.R_{52} + i_{12}.R_{12} - 200 = 0$
substituindo as resistências e trazendo as constantes para o lado direito, fica:
$-15.i_{54} - 5.i_{43} - 10.i_{32} + 10.i_{52} = 0$
$-20.i_{65} - 10.i_{52} + 5.i_{12} = 200$
Agora as 6 correntes desconhecidas podem ser representadas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -10 & 0 & -15 & -5 \\ 5 & -10 & 0 & -20 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_{12} \\ i_{52} \\ i_{32} \\ i_{65} \\ i_{54} \\ i_{43} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontra-se a solução: 6.15, -4.6, -1.53, -6.15, -1.53 e -1.53.

☞ **Para você fazer**

R_{12}	R_{23}	R_{34}	R_{45}
40	25	40	5
R_{25}	R_{56}	V_1	V_6
15	35	250	0

Responda aqui:

i_{12}	i_{52}	i_{32}	i_{65}	i_{54}	i_{43}
2.86					

5. Cascalho na construção civil

Extraído de [Cha13], pág. 252. Um engenheiro civil envolvido em uma construção precisa de areia (A), cascalho fino (F) e cascalho grosso (G) para um projeto de uma obra. Existem 3 minas de onde esses materiais podem ser obtidos. A composição de cada mina é dada. Quantos metros cúbicos devem ser minerados de cada mina para as necessidades do engenheiro ?

Seja um exemplo: $A = 4800m^3$, $F = 5800m^3$ e $G = 5700m^3$, com as seguintes proporções de cada mina:

	Areia	C. fino	C. grosso
Mina1	52	30	18
Mina2	20	50	30
Mina3	25	20	55

Para este caso, as respostas são: $M_1 = 4005m^3$, $M_2 = 7131m^3$ e $M_3 = 5162m^3$.

☞ **Para você fazer**

Suponha que as necessidades da obra são:

Areia	C. fino	C. grosso
7649	7798	7676

E as proporções para cada mina são (em percentagem):

Mina	Areia	C.fino	C.grosso
1	30	36	34
2	37	29	34
3	32	36	32

Responda aqui a quantidade de material a ser extraído em cada mina em m^3.

$m^3 M.1$	$m^3 M.2$	$m^3 M.3$
6331		

CHAPRA, Steven. **Métodos Numéricos aplicados com MATLAB**. Bookman. São Paulo, 2013. e FRANCO, Neide. **Cálculo Numérico**. Pearson, São Paulo, 2007.

111-69796 - 23/04