

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

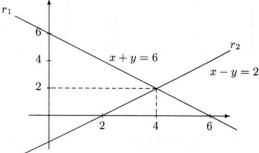
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

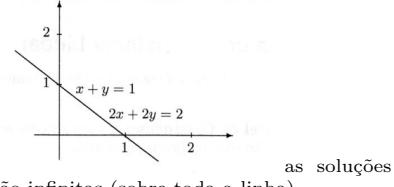


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

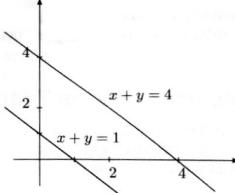


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8.j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 6 & 2 & 3 & 7 & 7 & 72 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 6 & 62 \\ 6 & 4 & 3 & 1 & 6 & 44 \\ 3 & 3 & 2 & 6 & 6 & 64 \\ 7 & 3 & 6 & 5 & 4 & 52 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 & 3 & 7 & 23 \\ 3 & 6 & 7 & 3 & 1 & 4 & 40 \\ 8 & 2 & 3 & 5 & 8 & 5 & 72 \\ 7 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 85 \\ 5 & 3 & 1 & 6 & 6 & 7 & 42 \\ 2 & 7 & 7 & 2 & 1 & 3 & 33 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-68993 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

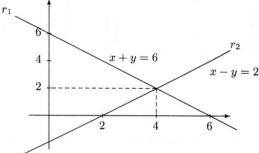
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

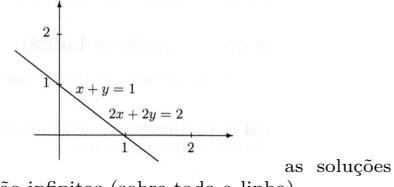


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

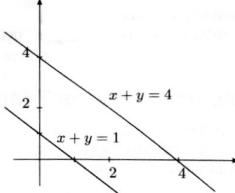


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8.j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 5 & 7 & 5 & 2 & 129 \\ 7 & 3 & 3 & 2 & 3 & 106 \\ 3 & 6 & 3 & 5 & 3 & 103 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 4 & 111 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 2 & 69 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 5 & 1 & 8 & 4 & 148 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 2 & 101 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 1 & 112 \\ 7 & 1 & 1 & 8 & 2 & 73 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 8 & 75 \\ 4 & 7 & 8 & 6 & 3 & 121 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69789 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

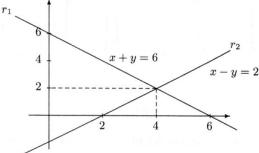
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

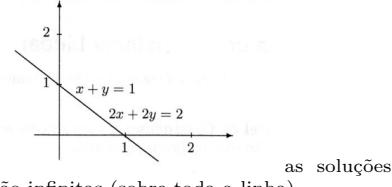


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

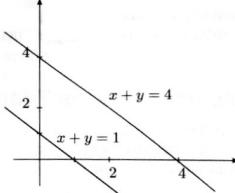


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 1 & 7 & 1 & 3 & 58 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 1 & 41 \\ 4 & 4 & 7 & 4 & 1 & 54 \\ 3 & 3 & 4 & 1 & 3 & 45 \\ 1 & 1 & 6 & 3 & 6 & 90 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 3 & 7 & 7 & 4 & 109 \\ 8 & 1 & 4 & 1 & 8 & 8 \\ 5 & 1 & 5 & 2 & 4 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 8 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 3 & 1 & 3 & 100 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69008 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

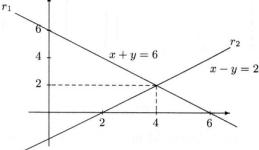
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

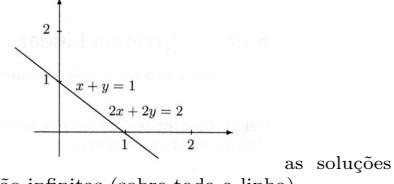


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

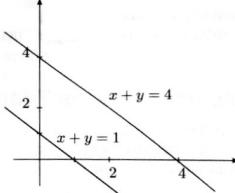


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8.j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 72 \\ 2 & 2 & 2 & 7 & 6 & 41 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 78 \\ 7 & 5 & 7 & 6 & 3 & 90 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 3 & 53 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 6 & 1 & 1 & 5 & 2 & 42 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 8 & 45 \\ 3 & 6 & 4 & 4 & 8 & 7 & 70 \\ 5 & 3 & 6 & 8 & 3 & 4 & 40 \\ 8 & 4 & 2 & 5 & 7 & 8 & 42 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & 5 & 7 & 45 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69015 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

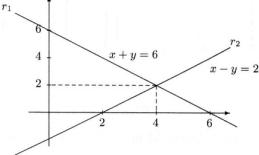
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

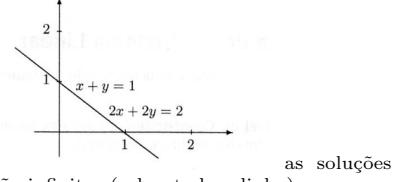


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

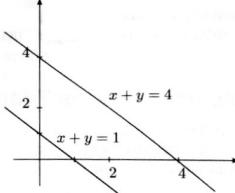


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 5 & 2 & 3 & 4 & 62 \\ 4 & 1 & 6 & 7 & 2 & 69 \\ 4 & 1 & 1 & 5 & 6 & 60 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 3 & 60 \\ 5 & 7 & 3 & 4 & 7 & 91 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 4 & 7 & 7 & 6 & 1 & 106 \\ 8 & 1 & 6 & 6 & 1 & 4 & 115 \\ 1 & 5 & 4 & 7 & 6 & 6 & 131 \\ 6 & 3 & 3 & 7 & 5 & 1 & 109 \\ 5 & 7 & 6 & 1 & 1 & 2 & 82 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 87 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69022 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

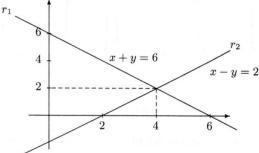
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

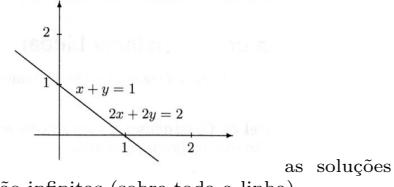


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

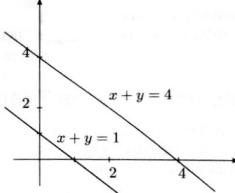


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 1 & 4 & 6 & 1 & 104 \\ 4 & 3 & 5 & 3 & 1 & 93 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 3 & 91 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 130 \\ 7 & 7 & 1 & 2 & 5 & 95 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 8 & 2 & 3 & 7 & 1 & 6 & 28 \\ 6 & 1 & 4 & 5 & 3 & 5 & 20 \\ 8 & 6 & 2 & 4 & 5 & 8 & 40 \\ 7 & 6 & 7 & 5 & 1 & 7 & 26 \\ 2 & 2 & 2 & 8 & 5 & 6 & 48 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 8 & 8 & 43 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69208 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

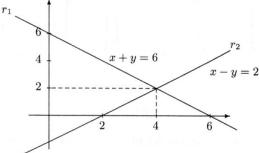
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

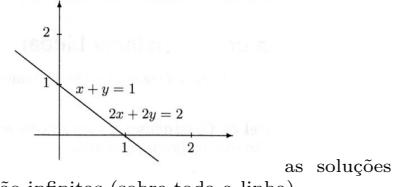


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

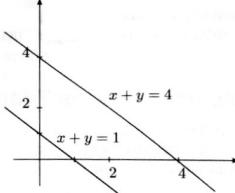


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8.j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 7 & 6 & 2 & 4 & 35 \\ 6 & 5 & 1 & 2 & 7 & 71 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 5 & 31 \\ 3 & 1 & 7 & 5 & 5 & 59 \\ 4 & 6 & 7 & 2 & 3 & 44 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 8 & 7 & 5 & 5 & 1 & 4 & 85 \\ 7 & 1 & 8 & 3 & 8 & 2 & 54 \\ 7 & 5 & 2 & 6 & 8 & 6 & 65 \\ 4 & 2 & 7 & 8 & 6 & 4 & 64 \\ 4 & 4 & 5 & 8 & 6 & 6 & 72 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 6 & 3 & 33 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69039 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

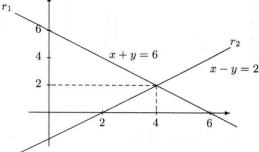
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

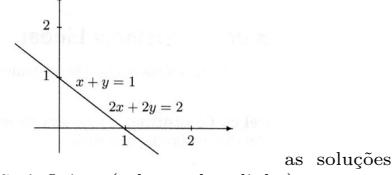


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

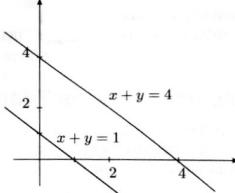


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8.j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 5 & 2 & 1 & 28 \\ 2 & 2 & 7 & 4 & 2 & 43 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & 6 & 77 \\ 7 & 2 & 7 & 4 & 7 & 88 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 3 & 55 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 7 & 2 & 4 & 1 & 74 \\ 1 & 5 & 6 & 1 & 2 & 38 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 7 & 121 \\ 5 & 5 & 3 & 3 & 4 & 73 \\ 1 & 5 & 3 & 6 & 3 & 148 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 1 & 117 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69046 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

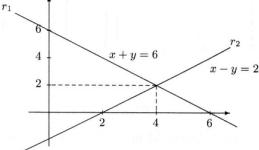
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

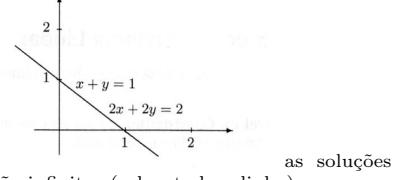


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

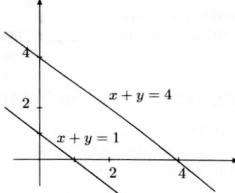


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = -\frac{7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8.j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 4 & 4 & 5 & 4 & 75 \\ 2 & 4 & 4 & 1 & 7 & 71 \\ 7 & 5 & 6 & 2 & 6 & 78 \\ 6 & 5 & 4 & 5 & 7 & 96 \\ 1 & 4 & 7 & 5 & 2 & 75 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 5 & 2 & 4 & 4 & 1 & 8 & 30 \\ 1 & 3 & 7 & 7 & 3 & 6 & 58 \\ 8 & 4 & 5 & 7 & 6 & 3 & 61 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 8 & 4 & 38 \\ 7 & 4 & 4 & 1 & 3 & 2 & 36 \\ 1 & 6 & 4 & 6 & 4 & 6 & 47 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69060 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo essas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

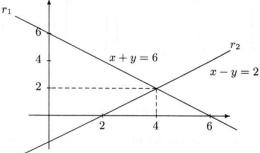
$$Ax = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

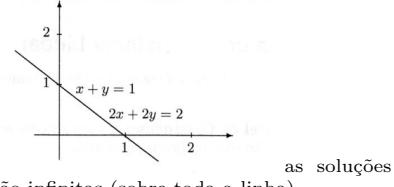


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

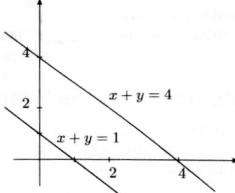


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8.j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. +0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 6 & 3 & 3 & 6 & 71 \\ 4 & 2 & 7 & 2 & 6 & 60 \\ 7 & 6 & 3 & 1 & 4 & 69 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 4 & 57 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 2 & 39 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 1 & 7 & 1 & 5 & 7 & 95 \\ 4 & 8 & 4 & 7 & 7 & 3 & 158 \\ 4 & 6 & 6 & 2 & 4 & 5 & 100 \\ 1 & 6 & 2 & 7 & 7 & 4 & 130 \\ 6 & 5 & 3 & 1 & 4 & 1 & 93 \\ 4 & 4 & 3 & 4 & 7 & 3 & 127 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69077 - 18/04

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z = 8$ é linear, mas $3x+2yz+3w = 27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2 + 4y + 5z = 90$ também não é linear, pois aparece x^2 .

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n . Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas equações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \end{cases}$$

tem a solução $x = 1$, $y = 1$ e $z = -1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

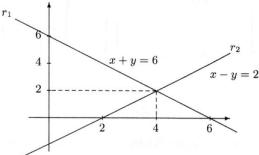
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

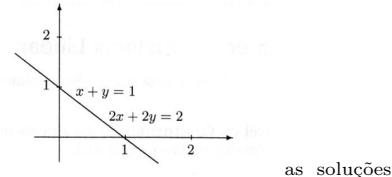


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4, 2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura

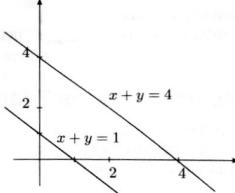


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = 23 \\ 3x + 3y + z = 27 \\ 2x + 5y + 2z = 25 \end{cases}$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array} \right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica: $2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array} \right)$$

Finalmente, eliminando o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.333333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.333333 & -7 \end{array} \right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.333333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i][passo]/a[passo][passo]
            for j in range(0,n):
                a[i][j]=a[i][j]-(pivot*a[passo][j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
        x[n-1]=b[n-1]/a[n-1][n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i][j]*x[j]
```

```
x[i]=x[i]/a[i,i]
return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resuelve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
[4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como $1+1j$ e não como $1+j$. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0. -3.j 5. +0.j ]
 [0.+0.j 1.6 +5.8j -7. +0.j ]
 [0.+0.j 0. -0.j 5.4198895+1.97790055j]]
-----
[ 10. -16.j -17.8+39.6j
 24.17127072-15.74585635j]
-----
[(2.999999999999999+4j),
 (2.000000000000004+1.494200711594962e-15j),
 (2.999999999999999-3.999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é $3+4j$, 2 e $-3-4j$.

Para você fazer

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito!).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 6 & 1 & 4 & 5 & 49 \\ 5 & 2 & 3 & 2 & 6 & 71 \\ 3 & 2 & 7 & 2 & 5 & 77 \\ 3 & 6 & 7 & 5 & 6 & 82 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 26 \end{array} \right)$$

2. Mais um, com o mesmo programa

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 5 & 8 & 2 & 6 & 2 & 8 & 50 \\ 7 & 3 & 2 & 6 & 8 & 8 & 89 \\ 7 & 3 & 8 & 4 & 3 & 1 & 65 \\ 7 & 8 & 6 & 2 & 3 & 8 & 71 \\ 7 & 1 & 8 & 4 & 1 & 2 & 60 \\ 3 & 8 & 3 & 3 & 8 & 7 & 74 \end{array} \right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	v	t



108-69796 - 18/04