UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 04/05/2019 - 21:21:12.1
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Interpolação - Método de Lagrange VIVO740p, V: 1.06 68993 ANDRE HEINECK HAHN 19FCN118 - 1 apos 30/05, 50%   ______ / ______ / ______

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU
- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ ($n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1,\ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0,\ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x),\ k = 0, 1, 2$:
$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$
$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$
$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_0}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1,\ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0,\ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   `2.46 3.47 4.42`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `6.2 42.5 406.8`

   E o valor a interpolar é 3.671

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   `2.81 3.74 4.75 5.82 6.78 7.77`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `4.7 31.5 298.6 3647.4 54477.2 961871.6`

   E o valor a interpolar é 5.906

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   `2.36 3.36 4.4 5.39 6.33`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `8.8 62.7 611.1 7596.2 114853.5`

   E o valor a interpolar é 5.371

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-68993 - 30/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 04/05/2019 - 21:21:12.1
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Interpolação - Método de Lagrange VIVO740p, V: 1.06 69789 BRUNO V GUIMARARES 19FCN118 - 2 apos 30/05, 50% ______ / ______ / ______

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU

- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ ($n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1,\ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0,\ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x)$, $k = 0, 1, 2$:
$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$
$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$
$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_o}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1,\ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0,\ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.95 4.02 4.95

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   8.8 62.4 608.2

   E o valor a interpolar é 4.599

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.92 3.97 4.99 5.92

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.9 33 313.5 3831.4

   E o valor a interpolar é 5.104

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.86 3.89 4.87 5.92 6.84 7.92

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.5 30.6 290.1 3542.6 52903.9 934000.9

   E o valor a interpolar é 5.989

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69789 - 30/05

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU

- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ ($n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1,\ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0,\ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x),\ k = 0, 1, 2$:

$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$

$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$

$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_0}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1,\ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0,\ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.99 3.96 4.94

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.8 32.4 307.3

   E o valor a interpolar é 4.675

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.55 3.57 4.57 5.55 6.52 7.6

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.5 30.5 289.8 3539.1 52852.1 933084

   E o valor a interpolar é 5.608

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.2 3.15 4.24 5.15 6.21 7.23

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.4 29.9 284 3467.2 51774.3 914005

   E o valor a interpolar é 5.076

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69008 - 30/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 04/05/2019 - 21:21:12.1
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Interpolação - Método de Lagrange VIVO740p, V: 1.06 69015 FELIPE DE ROSSI REZENDE
19FCN118 - 4 apos 30/05, 50% ______ / ______ /

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU

- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ $(n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1, \ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0, \ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x), \ k = 0, 1, 2$:

$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$

$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$

$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_0}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1, \ f(x_0) = 15; \ x_1 = 0, \ f(x_1) = 8; \ x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01})+$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.73 3.69 4.77

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.6 30.8 292.3

   E o valor a interpolar é 4.53

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.8 3.86 4.87 5.81 6.79

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.3 29 274.7 3353.3 50068.1

   E o valor a interpolar é 6.007

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.63 3.64 4.64 5.62 6.55 7.58

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.1 27.4 259.6 3169 47313 835142

   E o valor a interpolar é 6.392

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69015 - 30/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 04/05/2019 - 21:21:12.1
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Interpolação - Método de Lagrange VIVO740p, V: 1.06 69022 GIOVANA STOPANOVSKI BECKER 19FCN118 - 5 apos 30/05, 50% ______ / ______ /

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU

- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ $(n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1, \ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0, \ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x), \ k = 0, 1, 2$:
$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$
$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$
$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_0}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1, \ f(x_0) = 15; \ x_1 = 0, \ f(x_1) = 8; \ x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.3 3.28 4.29

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.7 31.7 300.6

   E o valor a interpolar é 4.268

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.89 3.82 4.83 5.84

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   8.7 61.8 602.3 7482.5

   E o valor a interpolar é 5.508

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.18 3.22 4.17 5.23

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   7.1 49 471.6 5808.7

   E o valor a interpolar é 4.856

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69022 - 30/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 04/05/2019 - 21:21:12.1
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Interpolação - Método de Lagrange VIVO740p, V: 1.06 69208 IAN DO AMARAL PIMENTA
19FCN118 - 6 apos 30/05, 50% ______ / ______ /

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU
- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ $(n+1$ pontos):

$$\begin{aligned} P_0(x) &= (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) &= (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ &... \\ P_n(x) &= (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1,\ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0,\ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x),\ k = 0, 1, 2$:

$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$

$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$

$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0.\frac{\frac{Prod_x}{Dif_0}}{Prod_0} + y_1.\frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2.\frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n.\frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1,\ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0,\ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.65 3.67 4.69

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   8.7 61.4 598.4

   E o valor a interpolar é 4.332

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.79 3.75 4.76 5.79

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.2 28.4 269.3 3287.7

   E o valor a interpolar é 4.916

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   3.02 4.02 5.05 6 7.08

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   5.2 35 332.8 4068.8 60816.4

   E o valor a interpolar é 5.901

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69208 - 30/05

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU
- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ $(n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1,\ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0,\ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x),\ k = 0, 1, 2$:

$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$

$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$

$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_0}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1,\ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0,\ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                   ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   `2.15 3.14 4.19`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `5.9 40 382`

   E o valor a interpolar é 3.574

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   `2.12 3.2 4.15 5.19 6.21 7.17`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `4.7 32.1 304.7 3722.3 55601.6 981802.6`

   E o valor a interpolar é 5.033

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   `2.72 3.79 4.73 5.76 6.76`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `5.2 35.3 335.3 4099.8 61283.4`

   E o valor a interpolar é 5.865

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69039 - 30/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 04/05/2019 - 21:21:12.1
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Interpolação - Método de Lagrange VIVO740p, V: 1.06 69046 MARCELL ANDREY MACHADO PINTO 19FCN118 - 8 apos 30/05, 50% ______ / / ______

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU

- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ $(n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1,\ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0,\ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x),\ k = 0, 1, 2$:

$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$

$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$

$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_0}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1,\ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0,\ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.67 3.71 4.75

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   8 56 542.4

   E o valor a interpolar é 4.392

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.77 3.79 4.83 5.81

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   8.3 58.1 564.3 6993.1

   E o valor a interpolar é 5.319

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   3.07 4.06 5.08 6.08 7.03 8.08

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.1 27.5 260.6 3181.7 47502.1 838481.6

   E o valor a interpolar é 6.753

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69046 - 30/05

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU
- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ $(n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1, \ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0, \ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x), \ k = 0, 1, 2$:
$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$
$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$
$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0.\frac{\frac{Prod_x}{Dif_o}}{Prod_0} + y_1.\frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2.\frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n.\frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1, \ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0, \ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                   ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.46 3.5 4.45

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   6.2 42.4 405.3

   E o valor a interpolar é 4.099

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   3.05 4.01 5.03 5.97 6.99

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   6.7 46.4 445 5473 82129.4

   E o valor a interpolar é 6.295

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.34 3.33 4.34 5.31 6.26 7.27

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.2 28.6 271.4 3313.8 49477.3 873378.1

   E o valor a interpolar é 5.845

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69060 - 30/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 04/05/2019 - 21:21:12.1
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Interpolação - Método de Lagrange VIVO740p, V: 1.06 69077 TAYANE CORDEIRO FARIA
19FCN118 - 10 apos 30/05, 50% ______ / / ______

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU
- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ ($n+1$ pontos):

$$P_0(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$
$$P_1(x) = (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)$$
...
$$P_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1, \ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0, \ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x)$, $k = 0, 1, 2$:

$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$

$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$

$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_o}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1, \ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0, \ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.78 3.87 4.8

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   5.6 38.1 363

   E o valor a interpolar é 4.301

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.33 3.36 4.31 5.38 6.31 7.33

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4 27.1 257 3137.5 46842.9 826842.8

   E o valor a interpolar é 5.098

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.89 3.86 4.92 5.86

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.6 31.4 298.3 3643.9

   E o valor a interpolar é 5.344

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69077 - 30/05

UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 04/05/2019 - 21:21:12.1
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Interpolação - Método de Lagrange VIVO740p, V: 1.06 69796 THONNY G FERRAZ 19FCN118 - 11 apos 30/05, 50% ______ / ______ / ______

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU

- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ ($n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1,\ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0,\ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x),\ k = 0, 1, 2$:
$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$
$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$
$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_o}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1,\ f(x_0) = 15;\ x_1 = 0,\ f(x_1) = 8;\ x_2 = 3,\ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Python

```
def lagra(x,y):
    xinterp=float(input("entre valor interp."))
    n=len(x)
    dif=[0]*n
    prod=[0]*n
    j=0
    while j<n:
        dif[j]=xinterp-x[j]
        j=j+1
    prodx=1
    j=0
    while j<n:
        prodx=prodx*dif[j]
        j=j+1
    i=0
    while i<n:
        prod[i]=1
        j=0
        while j<n:
            if i!=j:
                prod[i]=prod[i]*(x[i]-x[j])
            j=j+1
        i=i+1
    yinterp=0
    i=0
    while i<n:
        yinterp=yinterp+y[i]*
                    ((prodx/dif[i])/prod[i])
        i=i+1
    print('vetor diferencas ',dif)
    print('prodx ',prodx)
    print('vetor produtos ',prod)
    print('y interpolado ',yinterp)

#a=[-1.0,0,3]
#b=[15.0,8,-1]
a=[0.0,0.1,0.3,0.6]
b=[1.0,2.001,4.081,8.290]
lagra(a,b)
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   2.24 3.27 4.18

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   7.8 54.4 525.6

   E o valor a interpolar é 3.581

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.27 3.25 4.26 5.27 6.27 7.23

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.7 31.5 298.9 3651 54530.3 962812.8

   E o valor a interpolar é 4.968

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   2.54 3.56 4.57 5.53 6.53 7.58

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   4.2 28.2 267.2 3261.7 48698.5 859614.7

   E o valor a interpolar é 6.381

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3

118-69796 - 30/05