

Equivalência Lógica

Diz-se que P e Q são logicamente equivalente (ou apenas equivalentes) se as tabelas verdade destas duas proposições são idênticas. Escreve-se neste caso $P \Leftrightarrow Q$. Em particular se P e Q são ambas tautologias, ou são ambas contradições então elas são equivalentes.

Não se deve confundir $P \Leftrightarrow Q$ com $P \Leftrightarrow Q$. No primeiro caso tem-se uma operação lógica que dá um resultado de acordo com aulas passadas. (Uma boa sugestão aqui é relembrar o resultado da operação $\leftrightarrow$). O segundo é uma relação que pode ou não ser verdadeira.

A relação da equivalência lógica ($\Leftrightarrow$) entre proposições goza das 3 propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva. Acompanhe:

- reflexiva** P é sempre equivalente a P , seja P quem for.
- simétrica** Se P é equivalente a Q , então Q é sempre equivalente a P .
- transitiva** Se P é equivalente a Q , e Q é equivalente a R , então P é equivalente a R .

Redução ao absurdo

A bicondicional $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$, onde c é uma proposição lógica cujo valor lógico é sempre V, é uma tautologia pois a última coluna de sua tabela verdade é sempre V.

p	q	$(p \wedge \sim q)$	$\rightarrow$	c	$\leftrightarrow$	$(p \rightarrow q)$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

Esta proposição recebe o nome de demonstração por absurdo, e ela é muito importante na matemática e na inteligência artificial, sendo a base do método de demonstração automática de teoremas.

Negação conjunta

A negação conjunta de duas proposições p e q é a proposição $\sim p \wedge \sim q$, que é lida como **não p e não q**. Usa-se para esta representação o símbolo $\downarrow$, e escreve-se $p \downarrow q$. O símbolo $\downarrow$ junto com o $\uparrow$ são conhecidos como conectivos de Scheffer. Neste caso, tem-se

$$p \downarrow q \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$$

A tabela verdade de $p \downarrow q$ é a seguinte

p	q	$(\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Negação Disjunta

A negação disjunta de duas proposições p e q é a proposição **não p ou q**, ou simbolicamente $\sim p \vee \sim q$. A negação disjunta também é representada pela notação $p \uparrow q$, ou

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$$

e tem a seguinte tabela verdade

p	q	$(\sim p \vee \sim q)$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

👉 Para você fazer

Exercício 1 Nos exercícios a seguir, são dadas 2 expressões lógicas. Responda **S** se elas forem equivalentes e **N** se não forem.

1. $((q \vee p) \wedge (p \rightarrow (\sim q)))$ E $((q \vee p) \wedge (q \rightarrow (\sim p)))$

2. $((q \wedge (\sim r)) \wedge (r \wedge q)) \leftrightarrow (p \wedge (\sim r))$ E $((p \vee q) \vee (p \wedge r)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

3. $((q \vee p) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (\sim r)))$ E $((\sim r) \leftrightarrow (\sim p)) \leftrightarrow (q \rightarrow (\sim p))$

4. $((\sim q) \wedge p) \leftrightarrow (p \vee (\sim p))$ E $((\sim q) \vee p) \wedge (q \leftrightarrow (\sim p))$

5. $((q \vee (\sim p)) \leftrightarrow (q \rightarrow q)) \vee (p \leftrightarrow (\sim q))$ E $((\sim p) \rightarrow q) \vee (p \wedge p) \rightarrow (q \wedge p)$

6. $((p \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge (\sim p))) \wedge (p \vee q)$ E $((p \wedge (\sim q)) \wedge (q \vee q)) \vee (p \leftrightarrow (\sim q))$

Exercício 2 Nos exercícios a seguir são dadas as expressões a e b . Responda **S** se for possível concluir que $a \rightarrow b$ por redução ao absurdo e **N** se não for possível. Use sempre as proposições parciais $p, q, r, s, \dots$ nessa ordem.

7. $a = (((\sim p) \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge q))$
 $b = (((\sim q) \vee p) \wedge (p \leftrightarrow q))$

8. $a = (((\sim p) \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (\sim p)))$
 $b = (((\sim p) \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q))$

9. $a = ((p \wedge q) \wedge (p \wedge q))$
 $b = (((\sim p) \leftrightarrow q) \wedge (q \wedge q))$

10. $a = ((q \vee p) \vee (r \wedge (\sim q)))$
 $b = ((r \wedge p) \rightarrow (q \vee (\sim q)))$

11. $a = (((p \vee q) \wedge (q \leftrightarrow r)) \vee ((\sim q) \wedge q))$
 $b = (((\sim r) \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow p)) \wedge (q \vee p)$

12. $a = ((p \vee (\sim q)) \wedge ((\sim q) \wedge p))$
 $b = ((q \vee (\sim p)) \leftrightarrow (p \vee (\sim q)))$

Exercício 3 Nas frases abaixo, identifique se a resposta dada está certa (respondendo **S**) ou está errada (respondendo **N**) nas negações de conjunção ($\downarrow$) ou nas negações de disjunção ($\uparrow$). Use sempre as proposições parciais $p, q, r, s, \dots$ nessa ordem.

13. $a \uparrow b$. $a = (((p \vee q) \rightarrow ((\sim q) \rightarrow p)) \vee (q \wedge p))$ e $b = (((p \wedge q) \leftrightarrow (q \vee q)) \wedge ((\sim q) \leftrightarrow p))$ deu resultado = VFVV
14. $a \downarrow b$. $a = ((q \vee (\sim p)) \rightarrow (p \rightarrow q))$ e $b = ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \rightarrow q))$ deu resultado = VFFF
15. $a \downarrow b$. $a = (((\sim q) \leftrightarrow r) \vee (q \vee p))$ e $b = ((q \wedge (\sim p)) \wedge (p \wedge (\sim r)))$ deu resultado = FFFFFFFV
16. $a \uparrow b$. $a = ((q \rightarrow p) \vee (p \leftrightarrow (\sim q)))$ e $b = ((p \wedge (\sim q)) \leftrightarrow (p \vee q))$ deu resultado = VFVF
17. $a \downarrow b$. $a = (((p \vee q) \wedge (p \wedge q)) \rightarrow (p \vee (\sim q)))$ e $b = (((p \wedge q) \vee (p \wedge (\sim q))) \rightarrow (p \wedge p))$ deu resultado = VFFF
18. $a \uparrow b$. $a = ((q \vee (\sim r)) \rightarrow ((\sim p) \leftrightarrow r))$ e $b = ((r \rightarrow q) \wedge ((\sim r) \leftrightarrow p))$ deu resultado = VFVFFVVV
19. $a \uparrow b$. $a = ((q \rightarrow p) \leftrightarrow (q \leftrightarrow (\sim p)))$ e $b = ((q \wedge p) \rightarrow (p \vee q))$ deu resultado = VFVV
20. $a \uparrow b$. $a = (((q \vee (\sim r)) \vee (r \leftrightarrow q)) \vee (q \wedge p))$ e $b = (((q \rightarrow p) \vee (p \wedge (\sim p))) \vee (r \wedge p))$ deu resultado = FFVFVVVF

Escreva aqui

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20