

Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: **QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?**

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

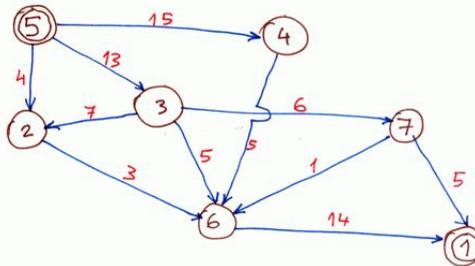
Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

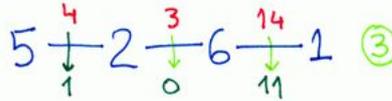
Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho. Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



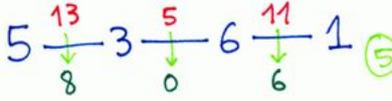
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

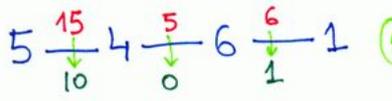
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

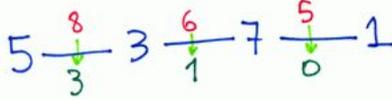
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0)

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=5$ e $fi=2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	17	0	5	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0	0	7
4	0	13	0	0	0	7	0
5	0	0	18	0	0	9	0
6	3	0	0	0	0	0	8
7	0	5	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=7$ e $fi=5$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	4	10	0	0
2	0	0	0	0	9	0	0
3	4	0	0	0	0	10	0
4	0	1	0	0	0	6	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	8	0	0	15	0	0
7	0	0	11	7	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=4$ e $fi=3$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	10	0	0	1	0	0
2	0	0	4	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	18	0	0	0	0	6	19
5	0	0	18	0	0	0	0
6	0	3	0	0	8	0	6
7	0	0	0	0	0	8	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

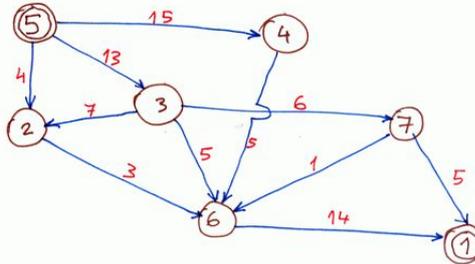
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

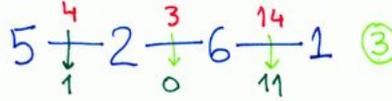
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



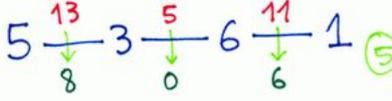
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

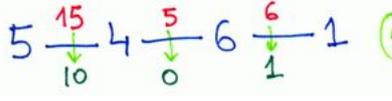
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

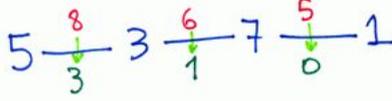
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

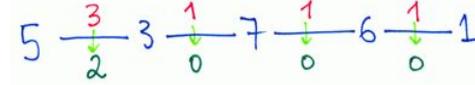
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=4$ e $fi=2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	6	0	0	0	2
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	18	0	0	0	0	6
4	13	0	0	0	0	3	11
5	0	14	0	0	0	0	0
6	0	0	2	0	3	0	0
7	0	0	4	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	2	0	9	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	14	0	0	0	0	0	8
4	0	17	0	0	0	0	0
5	0	14	0	5	0	0	0
6	0	5	0	0	0	0	0
7	8	0	0	0	10	2	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=1$ e $fi=3$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	6	12	12
2	0	0	2	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	9	0	0	10	0
5	0	0	0	9	0	0	0
6	0	5	0	8	0	0	0
7	0	5	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

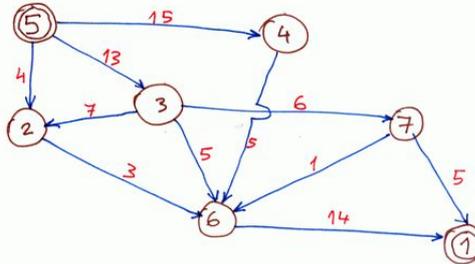
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

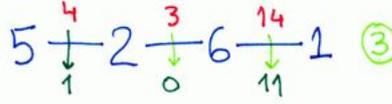
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



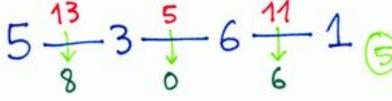
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

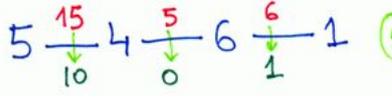
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

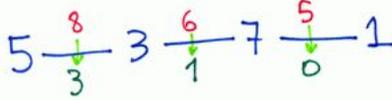
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0)

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=7$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	4	0	0
2	0	0	0	6	6	9	0
3	0	0	0	0	0	11	0
4	0	0	6	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	13	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	16	0	0	1	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=5$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	3	8	0	0	0
2	0	0	6	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	2	0
4	0	5	0	0	0	12	0
5	20	17	0	0	0	0	3
6	0	0	0	0	0	0	0
7	4	0	4	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=1$ e $fi=4$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	8	0	0	0	17	8
2	0	0	4	0	6	0	5
3	0	0	0	1	0	2	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	8	0	0	0
6	0	0	0	0	8	0	0
7	0	0	4	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

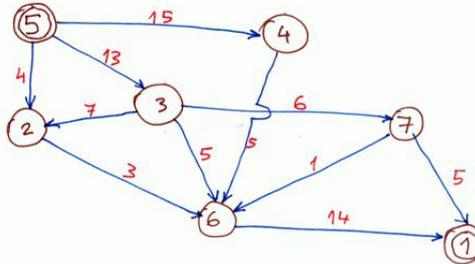
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

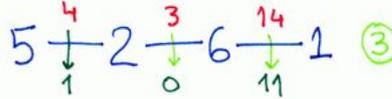
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



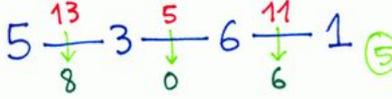
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	(0)
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

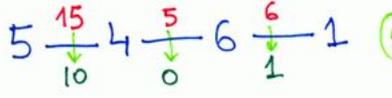
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

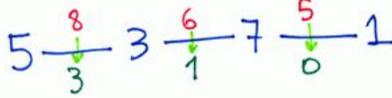
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	(0)
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

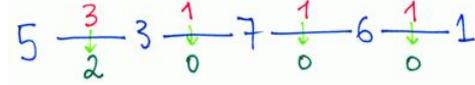
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0)

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=7$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	0	0	0	4	0
2	7	0	0	0	0	1	0
3	2	0	0	0	1	0	0
4	10	0	0	0	6	0	0
5	0	0	0	0	0	2	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	18	15	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=6$ e $fi=1$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	7	0	0	0	0
3	4	0	0	0	7	0	0
4	0	0	9	0	0	0	6
5	0	0	0	3	0	0	10
6	0	12	0	4	19	0	0
7	2	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	4	0	17	0
2	4	0	0	0	0	0	9
3	0	18	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	8	0	10
5	0	0	0	0	0	11	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	1	0	18	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: **QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?**

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

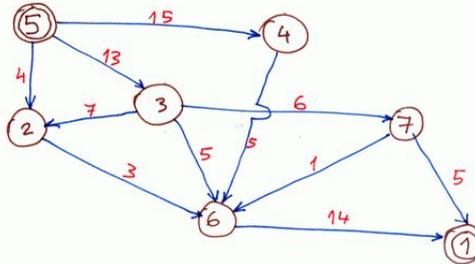
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

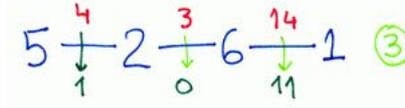
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



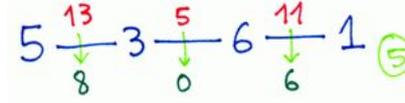
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

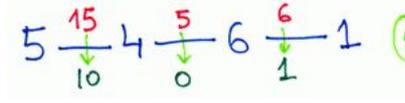
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

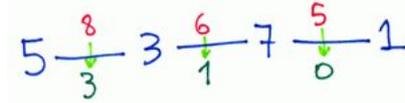
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=1$ e $fi=5$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	20	0	0	13	12
2	0	0	0	2	1	0	0
3	0	10	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	17	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	9	8	0	0	0
7	0	2	0	5	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=4$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	3	0	5	0	0
2	0	0	0	0	0	11	0
3	0	6	0	0	10	0	0
4	17	0	4	0	0	0	20
5	0	0	0	0	0	1	3
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	10	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	18	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	7	17	0	16
4	2	0	0	0	9	0	0
5	1	0	0	0	0	5	0
6	5	8	0	0	0	0	0
7	7	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

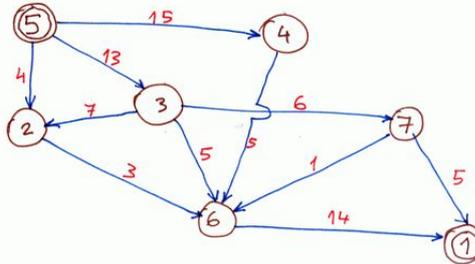
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

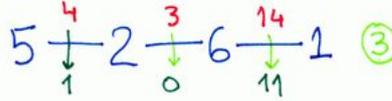
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



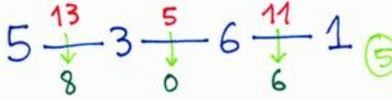
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

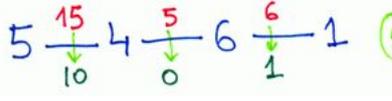
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

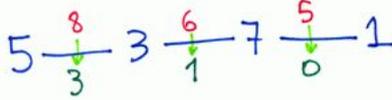
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

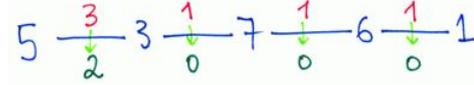
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 2$ e $fi= 5$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	0	0	3
2	3	0	8	0	0	19	0
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	20	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	4	0	0	7
7	6	0	0	0	6	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 2$ e $fi= 7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	2
2	0	0	0	7	20	16	0
3	4	0	0	0	0	0	19
4	7	0	0	0	0	0	0
5	3	0	5	1	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 6$ e $fi= 5$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	2	1	0	0	10
2	0	0	0	0	0	0	4
3	0	0	0	7	0	0	0
4	0	5	0	0	17	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	12	5	8	0	0	0	0
7	0	0	0	0	7	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguímos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

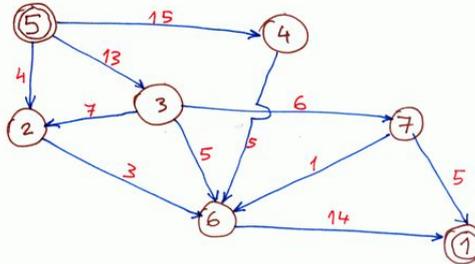
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

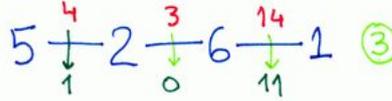
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



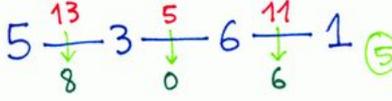
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

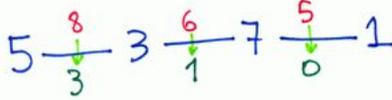
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

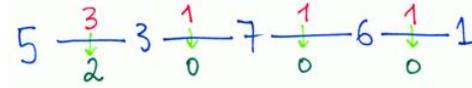
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=4$ e $fi=7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	4	0	0	1	0
2	0	0	0	0	7	10	0
3	0	0	0	0	0	0	8
4	20	5	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	4
6	0	4	0	0	2	0	12
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=2$ e $fi=1$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	12	13
3	8	0	0	0	9	0	0
4	2	0	0	0	0	0	0
5	16	0	8	0	0	0	0
6	0	0	4	0	8	0	0
7	0	0	4	6	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=4$ e $fi=1$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	6	0	9	0	9
3	20	0	0	0	0	0	0
4	0	18	0	0	0	2	0
5	4	0	0	0	0	0	0
6	0	7	2	0	0	0	0
7	13	0	0	0	0	6	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

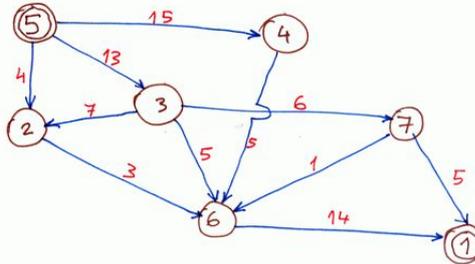
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

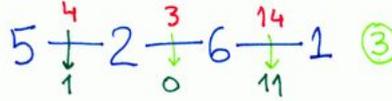
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



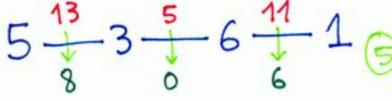
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

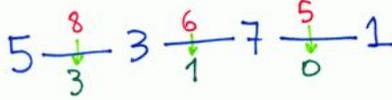
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

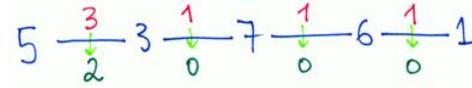
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=6$ e $fi=7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	3	0	8	0	0	9
2	0	0	0	6	0	0	0
3	3	0	0	1	2	0	0
4	0	0	0	0	0	0	16
5	0	0	0	0	0	0	2
6	0	1	16	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=5$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	20	0	6
2	7	0	0	0	0	0	10
3	0	16	0	15	0	8	0
4	8	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	2	0	0	2	0	0	0
7	0	0	0	0	13	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=1$ e $fi=4$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	15	15	4
2	0	0	0	6	8	0	0
3	0	0	0	18	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	6	3	0	0	0	0
6	0	8	0	0	0	0	0
7	0	0	6	0	0	1	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

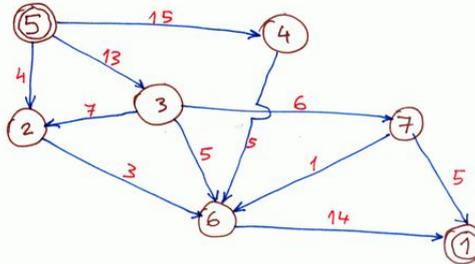
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

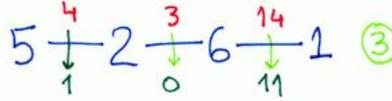
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



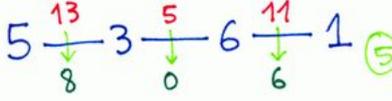
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

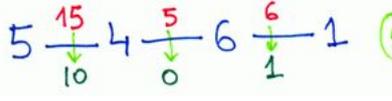
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

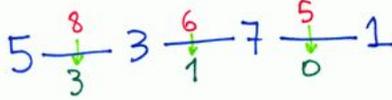
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

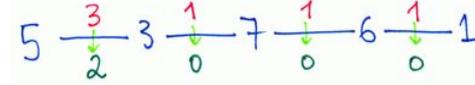
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	16	0
2	6	0	0	0	0	0	1
3	0	10	0	5	5	0	0
4	4	0	0	0	6	0	0
5	5	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	9	0	0	0	0	6	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=7$ e $fi=2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	10	0	9	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	10	0	0	0
4	0	19	8	0	0	0	0
5	0	14	0	0	0	0	0
6	0	0	0	3	5	0	0
7	11	0	9	0	0	15	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=5$ e $fi=2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	9	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	1	17	0	0	0	8	0
4	6	0	10	0	0	0	6
5	0	0	0	18	0	8	0
6	0	0	2	0	0	0	0
7	0	4	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

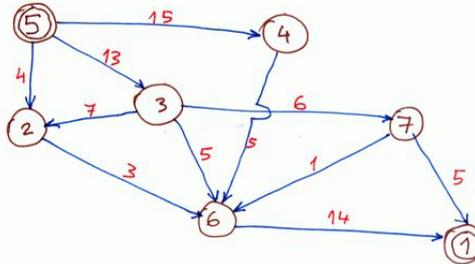
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

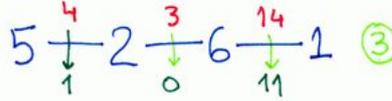
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



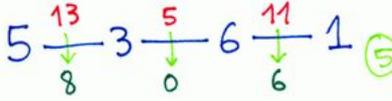
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

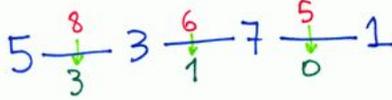
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

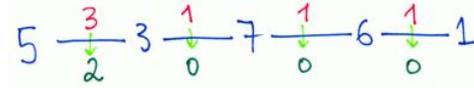
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0)

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 3$ e $fi= 7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	9	0	4	0
2	10	0	0	0	0	0	0
3	7	4	0	0	13	0	0
4	0	0	0	0	1	0	14
5	0	0	0	10	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	11
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 5$ e $fi= 4$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	7	3	0	0	0	0
2	0	0	1	6	0	0	0
3	0	9	0	19	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	9	0	0	0	0	20	0
6	0	6	0	0	0	0	3
7	0	0	0	19	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 2$ e $fi= 1$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	18	0	11	0
3	4	0	0	9	0	0	0
4	0	0	5	0	2	2	7
5	12	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	6	0	0
7	9	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

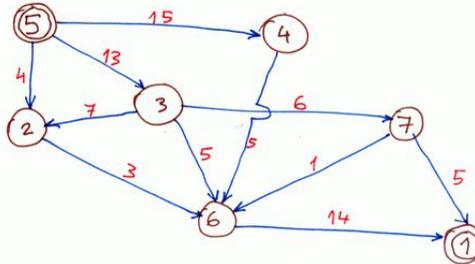
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

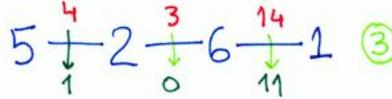
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



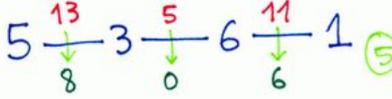
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	(0)
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

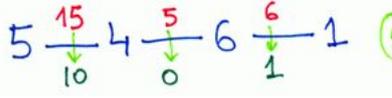
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

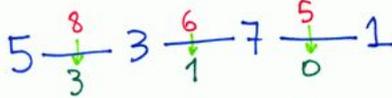
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	(0)
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

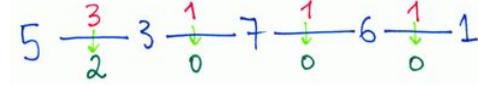
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0)

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in=6$ e $fi=2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	7	0	0	0	7
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	10	0	0	0	0	3
4	0	0	2	0	0	0	6
5	0	3	0	0	0	0	0
6	3	0	0	7	0	0	0
7	0	15	0	0	10	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	8	0	0	0	3	0
2	1	0	0	0	0	0	12
3	13	0	0	17	14	0	0
4	0	5	0	0	0	0	0
5	5	5	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	16
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in=5$ e $fi=3$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	8	0	0	10	0
2	0	0	17	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	10	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	12	1
6	0	9	0	0	0	0	7
7	7	5	0	1	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

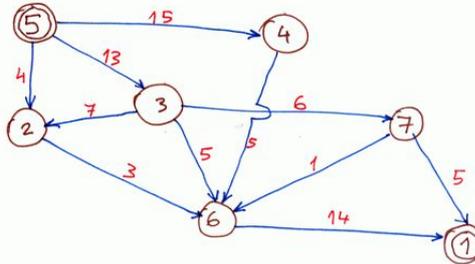
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

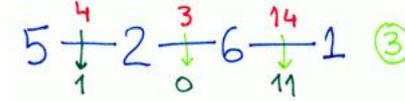
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



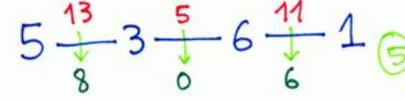
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	(0) 0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

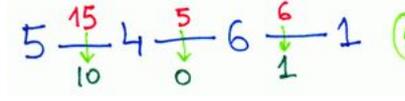
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0) 6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

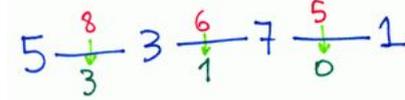
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	(0) 0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0) 0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=6$ e $fi=4$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	3	0	0	0
2	5	0	0	0	1	0	7
3	6	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	2	0	0	2
6	0	11	1	0	0	0	5
7	3	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	2	0	0	0	0	8
2	8	0	0	0	4	4	0
3	0	10	0	1	2	0	0
4	0	0	0	0	0	5	0
5	8	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	4
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=4$ e $fi=3$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	10	0
2	0	0	0	0	0	5	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	18	2	0	0	4	0	0
5	0	0	0	0	0	6	8
6	5	0	5	0	0	0	0
7	9	0	16	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

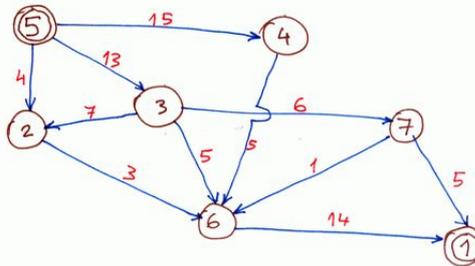
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

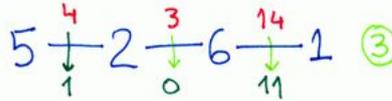
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



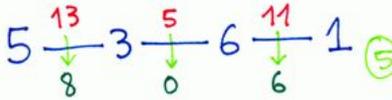
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

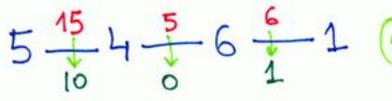
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

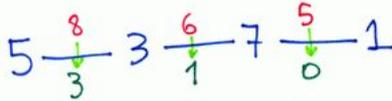
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=4$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	8	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	4	5
3	0	0	0	0	0	14	0
4	19	0	0	0	0	0	8
5	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	6	5	0	2	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=1$ e $fi=5$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	12	10	0	19	0
2	0	0	8	0	20	0	0
3	0	0	0	0	0	6	8
4	0	3	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	0	8	0	0	0	0	4
7	0	0	0	0	4	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=2$ e $fi=4$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	8	0	0
2	4	0	0	0	0	7	4
3	0	0	0	8	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	9	0	0	6	0	0	5
6	0	0	9	0	3	0	0
7	0	0	2	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: **QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?**

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

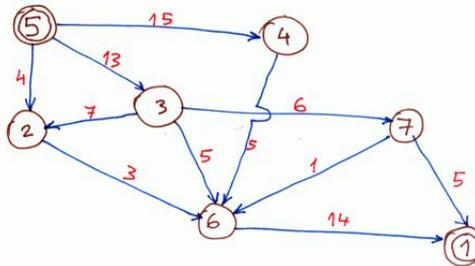
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

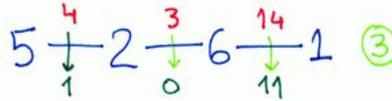
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



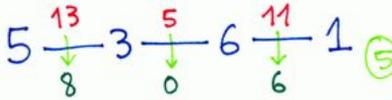
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	(0)
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

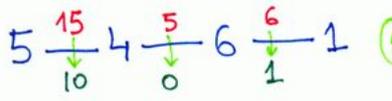
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

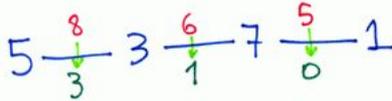
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=7$ e $fi=1$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	14	0	0	8	0	6	0
3	5	0	0	0	0	0	0
4	0	0	4	0	0	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0
6	0	8	6	0	0	0	0
7	0	0	0	3	2	15	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=5$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	7	0	20	0
2	3	0	0	0	0	0	0
3	10	0	0	0	0	0	9
4	0	7	0	0	0	0	5
5	0	8	6	11	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	17

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=6$ e $fi=1$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0
3	0	9	0	0	0	0	3
4	8	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	8	0	0	0
6	0	0	12	0	16	0	4
7	0	4	0	5	10	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

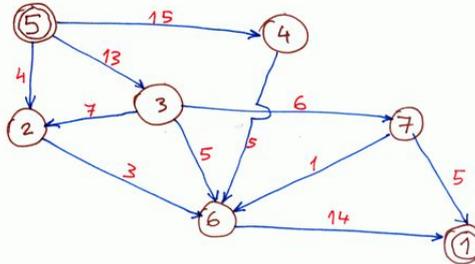
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

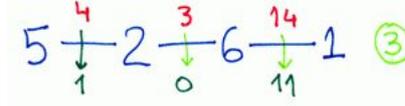
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



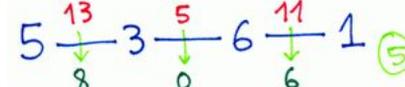
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	(0)
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

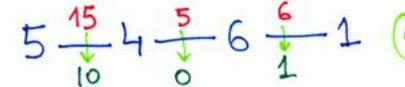
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

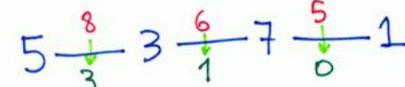
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	(0)
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

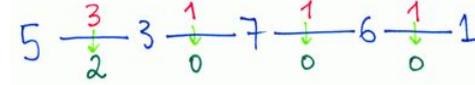
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0)

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=6$ e $fi=5$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	7	0	0	0	0
2	0	0	8	0	0	0	0
3	0	0	0	0	14	0	0
4	0	0	8	0	13	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	7	7	0	0	0	0	2
7	0	0	6	5	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=1$ e $fi=4$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	8	0	11	0	0
2	0	0	0	7	0	10	0
3	0	0	0	0	0	10	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	2	0	0	0	9	3
6	0	0	0	11	0	0	0
7	0	0	3	15	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=2$ e $fi=7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	10	0	0
2	1	0	6	0	0	13	0
3	0	0	0	3	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	15
5	0	0	0	0	0	0	6
6	0	0	3	9	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

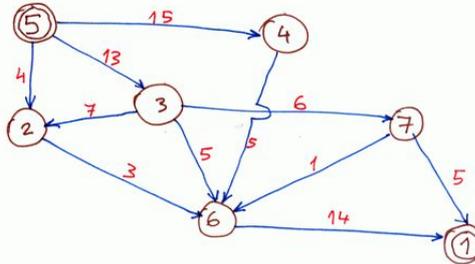
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

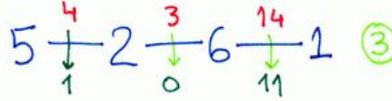
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



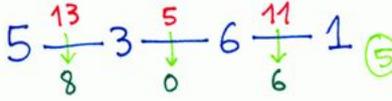
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

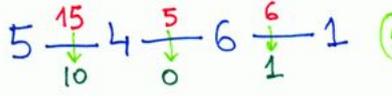
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

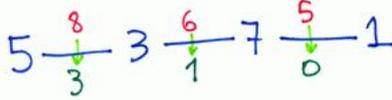
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

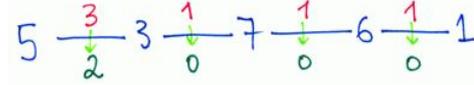
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=2$ e $fi=3$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	17	0	0	1	0
2	0	0	0	16	0	5	14
3	0	0	0	0	0	0	0
4	3	0	0	0	4	0	0
5	10	0	19	0	0	0	0
6	0	0	0	0	5	0	0
7	3	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	2	0	0	0	3	0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	0	16	0	11	0	0	0
4	4	8	0	0	8	0	5
5	0	0	0	0	0	3	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	7	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	5	19	0
2	9	0	0	10	0	0	0
3	0	13	0	0	17	0	9
4	0	0	0	0	0	15	0
5	5	3	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	10	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

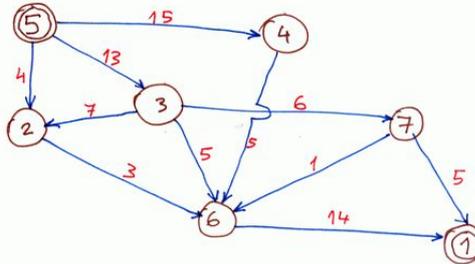
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

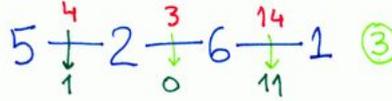
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



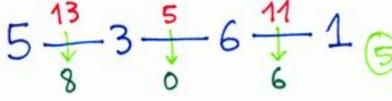
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

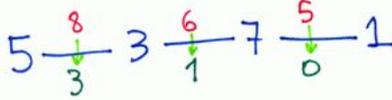
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

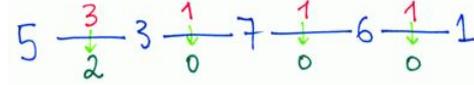
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=5$ e $fi=7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	2	0	0	6	0
2	0	0	0	0	0	1	0
3	10	0	0	0	0	0	10
4	6	0	8	0	0	0	0
5	2	10	0	12	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	18
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=5$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	6	0	0	1	0
2	0	0	10	2	0	0	0
3	0	0	0	0	0	12	0
4	0	8	0	0	0	14	0
5	0	3	0	0	0	0	12
6	0	0	0	0	0	0	0
7	8	0	0	6	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=2$ e $fi=7$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	5	0	0	0	0
2	4	0	0	12	3	0	0
3	0	0	0	0	5	0	15
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	0	6	0	0	3	0
6	0	0	0	0	10	0	6
7	0	0	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo in=1 e fi=6

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

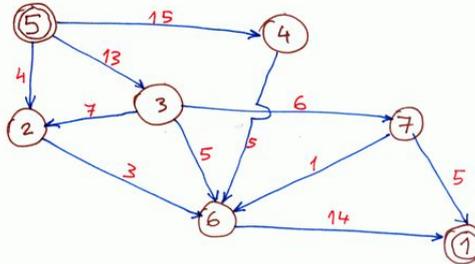
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

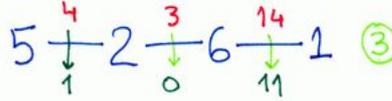
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com in=5 e fi=1



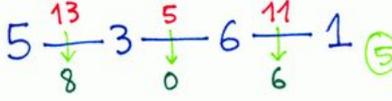
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

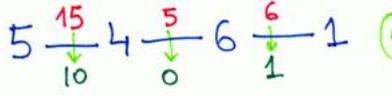
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

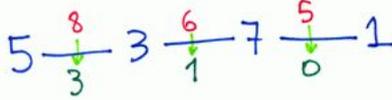
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com in= 2 e fi= 5

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	15	0	0
2	0	0	12	14	0	0	16
3	2	0	0	0	0	0	0
4	6	0	0	0	0	0	3
5	0	0	0	0	0	0	0
6	7	0	0	0	1	0	0
7	4	0	0	0	0	3	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com in= 5 e fi= 3

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	8	0	0	6
2	0	0	0	10	0	4	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	9	0	5	0	0	2	0
5	11	11	0	0	0	0	0
6	0	0	2	0	0	0	0
7	0	0	10	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com in= 2 e fi= 4

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	8	0	7	0	0
2	13	0	0	0	0	19	17
3	0	0	0	5	0	3	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	9	0	0	18	0	0	0
6	0	0	0	0	8	0	0
7	0	0	0	0	10	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: **QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?**

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

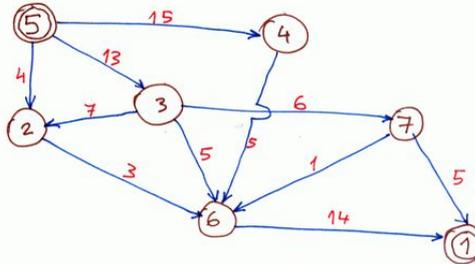
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

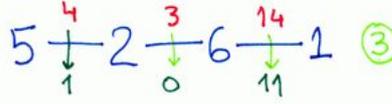
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



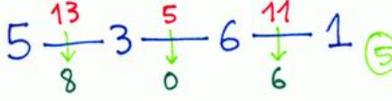
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	(0)	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

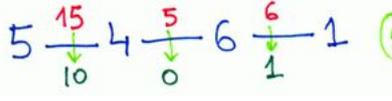
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	(0)	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

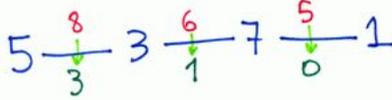
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	(0)	0
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

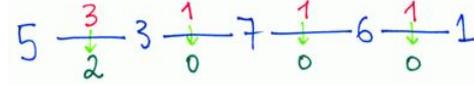
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	(0)	0

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=5$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	9	9	0	0	0	0
2	0	0	0	9	0	8	0
3	0	0	0	0	0	10	0
4	0	0	7	0	0	0	0
5	3	0	0	16	0	0	20
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	9	7	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=6$ e $fi=2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	10	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	9
5	2	0	4	0	0	0	4
6	0	0	0	14	8	0	6
7	2	0	1	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZÃO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=7$ e $fi=3$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	10	0	0	0	3	0
2	0	0	1	0	8	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	4	0	0	5	0
5	0	10	0	9	0	0	0
6	0	0	12	0	0	0	0
7	8	0	0	0	8	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguimos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

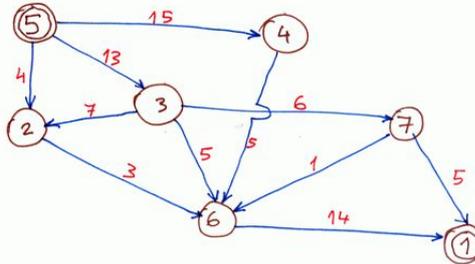
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

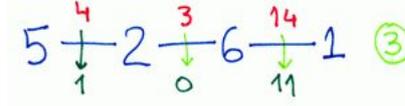
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



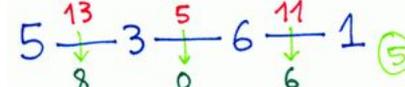
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	(0)
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

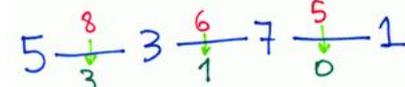
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	(0)
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

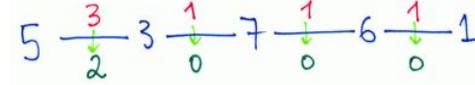
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0)

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 2$ e $fi= 5$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	2	0	17	0	0
2	0	0	17	0	0	12	1
3	7	0	0	0	0	4	0
4	0	0	0	0	10	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0
6	3	0	0	3	0	0	0
7	0	0	0	9	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 1$ e $fi= 6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	4	9	13	0	0	0
2	0	0	0	0	6	0	8
3	0	0	0	0	8	0	0
4	0	0	0	0	6	0	0
5	0	0	0	0	0	17	6
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	9	0	0	6	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZAO MAXIMA para este fluxo em rede com $in= 3$ e $fi= 2$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	6	6	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	12	0	0	9	0	0	13
4	1	0	0	0	9	0	0
5	0	15	0	0	0	0	0
6	5	5	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	2	0	0

A vazão máxima é _____.



Cálculo de Fluxos - método: Ford-Fulkerson, algoritmo: Edmonds-Karp

Bibliografia: Algoritmos, Cormen et alli, pag. 509 e seguintes. Note que as contagens iniciam em 1.

Imaginando um grafo orientado como sendo uma rede de transporte de água (ou qualquer outra coisa) e supondo que o valor de cada aresta representa a capacidade máxima do cano que liga dois pontos, e supondo ainda que um dos vértices representa a caixa d'água e outro representa o local onde a água vai ser usada, cabe a pergunta: *QUAL A VAZÃO MÁXIMA DO SISTEMA ?*

O mesmo algoritmo vale para sistemas produtor-consumidor: produtos sendo transportados, pacotes de bits sendo enviados, pessoas saindo de um avião etc.

Nomenclatura Fluxo em rede $G = (W, E)$ é um grafo orientado em que cada aresta (u, w) pertencente a E , tem capacidade não negativa $c(u, w) \geq 0$. Distinguímos dois vértices "in" e "fi" que são a origem e o destino. Todos os vértices z residem em algum caminho, isto é: $in \rightarrow z \rightarrow fi$.

A vazão do sistema (V) é uma função de valor real indica a capacidade do sistema de transportar o objeto de estudo.

Problema da Vazão máxima

O problema de VAZÃO MÁXIMA é encontrar o maior valor para a VAZÃO.

Exemplo de um fluxo: (retirado da referência acima, pág. 522)

	1	2	3	4	5	6
1	0	16	13	0	0	0
2	0	0	10	12	0	0
3	0	4	0	0	14	0
4	0	0	9	0	0	20
5	0	0	0	7	0	4
6	0	0	0	0	0	0

sendo $in=1$ e $fi=6$

Método Ford-Fulkerson O método Ford-Fulkerson para calcular a vazão máxima é:

1. Fazer vazão V igual a zero
2. Enquanto houver caminho entre in e fi
3. Localizar um caminho entre in e fi .
4. Achar a capacidade mínima CM deste caminho.
5. Adicionar CM a V
6. Subtrair CM das arestas que pertencem ao caminho escolhido
7. A vazão máxima está em V

O método acima não diz nada a respeito de como escolher o caminho. O resultado final não se altera, mas a complexidade do problema sim.

Algoritmo Edmonds-Karp Para resolver esta indefinição, Edmonds e Karp desenvolveram uma estratégia para escolher o caminho. Trata-se de considerar cada aresta existente no grafo com valor unitário e escolher o caminho mínimo entre in e fi . Note que o valor deste caminho não tem nada a ver com o fluxo, é uma simples contagem de quantidade de arestas.

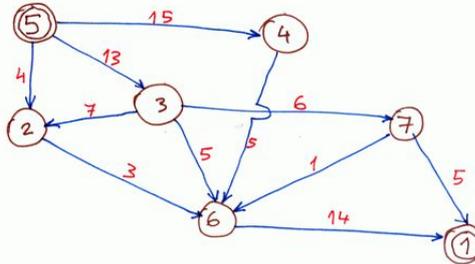
Usando o algoritmo de Edmonds-Karp, a complexidade passa a ser $O(W.E^2)$ onde W =número de vértices e E =número de arestas.

Para resolver este exercício você pode escolher qualquer caminho.

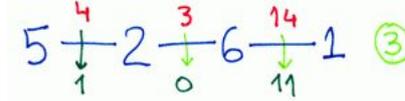
Acompanhe no exemplo. Seja o grafo

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	3	0
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	4	13	15	0	0	0
6	14	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

com $in=5$ e $fi=1$



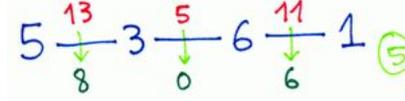
O primeiro caminho pode ser 5-2-6-1 com mínimo=3, $V=3$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	(0)
3	0	7	0	0	0	5	6
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	(1)	13	15	0	0	0
6	(11)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

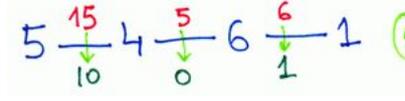
Outro caminho pode ser 5-3-6-1, com mínimo=5, logo $V=3+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	5	0
5	0	1	(8)	15	0	0	0
6	(6)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

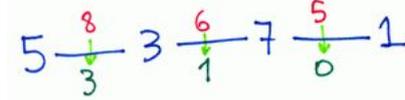
Outro: 5-4-6-1, com mínimo=5, $V=3+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	6
4	0	0	0	0	0	0	(0)
5	0	1	8	(10)	0	0	0
6	(1)	0	0	0	0	0	0
7	5	0	0	0	0	1	0

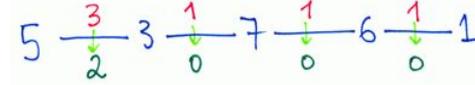
Outro: 5-3-7-1, com mínimo=5, $V=3+5+5+5$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(1)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(3)	10	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	0
7	(0)	0	0	0	0	1	0

Outro: 5-3-7-6-1, com mínimo=1 e $V=3+5+5+5+1$



e M fica

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	7	0	0	0	0	(0)
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	1	(2)	10	0	0	0
6	(0)	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	(0)

E como não há mais caminhos, V está calculado e vale 19.

Para você fazer

1. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=4$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	13	0	0	0
2	0	0	0	0	0	4	8
3	0	5	0	0	0	11	0
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	9	0	0	0
6	7	0	0	0	7	0	3
7	7	0	0	16	0	0	0

A vazão máxima é _____.

2. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=3$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0	0	16	0
2	0	0	0	7	0	18	0
3	0	0	0	0	8	0	19
4	6	0	0	0	0	9	0
5	5	0	0	10	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0
7	6	8	0	0	0	0	0

A vazão máxima é _____.

3. Ache a VAZAO MÁXIMA para este fluxo em rede com $in=2$ e $fi=6$

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	7	0	0	0	10
2	9	0	0	10	1	0	0
3	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	5	0	0	0	0
5	8	0	0	0	0	0	9
6	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	5	0	7	0

A vazão máxima é _____.

