Determinantes

Toda matriz quadrada está associada a um número específico denominado determinante da matriz. Esta função (determinante) tem algumas propriedades interessantes. Indica-se o determinante da matriz A como $|A|$ ou ainda como $det(A)$. Se a matriz for 1×1 seu determinante é o próprio elemento que compõe a matriz. Na equação linear a uma incógnita x em

$$ax = b$$

pode-se encarar a como uma matriz 1×1 aplicada a um vetor x de uma componente. Se $det(a) \neq 0$, isto é, se $a \neq 0$, então a equação tem uma única solução $x = \frac{1}{a}b$. Entretanto, se $det(a) = 0$ ou seja, se $a = 0$ então a equação não tem solução se $b \neq 0$ e todo número é uma solução se $b = 0$, logo a solução não é única.

Este resultado é válido no caso mais geral. $det(A) \neq 0$ é condição necessária e suficiente para a equação linear $Ax = b$ ter uma única solução.

Determinante de ordem 2

O determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ do tipo 2×2 é indicado e definido como segue: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ Note-se que o conjunto de números entre barras verticais não é uma matriz e sim um arranjo auxiliar construído para calcular o determinante da matriz original.

Seja por exemplo a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. O seu determinante é $1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$.
Considerando duas equações lineares a duas incógnitas $\begin{matrix} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{matrix}$
Resolvendo pela eliminação de y, multiplica-se a primeira equação por b_2, a segunda equação por $-b_1$ e depois adicionando-se a soma fica $(a_1b_2 - a_2b_1)x = b_2c_1 - b_1c_2$. O sistema tem uma única solução se o coeficiente de x nesta última equação não é zero, isto é, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$
Observe-se que D é o determinante da matriz dos coeficientes do sistema de equações. Neste caso, onde $D \neq 0$ pode-se obter x e y de modo único como quocientes de determinantes como segue $x = \frac{N_x}{D} = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$ e $y = \frac{N_y}{D} = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$
Aqui D o determinante da matriz dos coeficientes aparece no denominados de ambos os quocientes. Os numeradores N_x e N_y dos quocientes para x e y podem ser obtidos substituindo-se a coluna dos coeficientes da incógnita dada pela coluna dos termos constantes na matriz dos coeficientes.

Seja por exemplo, resolver o sistema $\begin{matrix} 3x + 2y = 17 \\ 2x - y = 2 \end{matrix}$
O determinante D da matriz de coeficientes é $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 4 = -7$
Como $D \neq 0$ o sistema tem uma única solução. Para obter o numerador N_x substitui-se na matriz dos coeficientes os coeficientes de x pelos termos constantes e fica $N_x = \begin{vmatrix} 17 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -17 - 4 = -21$ procedendo da mesma maneira para y fica $N_y = \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 34 = -28$

Assim, a única solução do sistema é $x = \frac{N_x}{D} = \frac{-21}{-7} = 3$ e $y = \frac{N_y}{D} = \frac{-28}{-7} = 4$ e a resposta final é $x = 3, y = 4$.

Determinantes de ordem 3

Há um truque que permite memorizar e facilitar o cálculo de um determinante de ordem 3 que é

- Copie as colunas 1 e 2 ao lado da coluna 3. O arranjo vai ficar com 3 linhas e 5 colunas. O desenho vai ficar $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.
- desenhe 3 diagonais, pegando
  1. a_1, b_2, c_3
  2. b_1, c_2, a_3
  3. c_1, a_2, b_3
- Some os 3 produtos obtidos um em cada uma das diagonais
- Desenhe 3 diagonais reversas pegando
  1. a_3, b_2, c_1
  2. b_3, c_2, a_1
  3. c_3, a_2, b_1
- Some os 3 produtos obtidos em cada uma das diagonais e SUBTRAIA este valor do total anterior
- Está calculado o determinante

Equações Lineares a 3 incógnitas e determinantes

Considerando 3 equações lineares a três incógnitas x, y e z: $\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{matrix}$
Este sistema tem solução única se e somente se o determinante da matriz dos coeficientes é não nulo. $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ Neste caso, a solução do sistema pode ser expressa como quocientes de determinantes, $x = \frac{N_x}{D}, y = \frac{N_y}{D}, z = \frac{N_z}{D}$ onde D é o determinante da matriz de coeficientes e N_x, N_y e N_z são os determinantes obtidos substituindo as colunas dos coeficientes da incógnita pelas colunas dos termos constantes.

Matrizes Inversíveis

Diz-se que uma matriz quadrada é inversível se existe uma matriz B com a propriedade de que $AB = BA = I$ onde I é a matriz unidade.

A matriz B inversa de A é única se existir. A matriz inversa de A é indicada por A^{-1}. Note-se que a relação acima é simétrica, pois se B é a inversa de A então A também é inversa de B.

Mecanismos de cálculo da inversa

Usando a teoria: Usando a teoria, dada uma matriz como por exemplo $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ Uma possibilidade é querer encontrar escalares x, y, z e w para os quais
$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou
$\begin{pmatrix} 3x + 5z & 3y + 5w \\ 2x + 3z & 2y + 3w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
ou ainda equações que satisfaçam $\begin{cases} 3x + 5z = 1 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} 3y + 5w = 0 \\ 2y + 3w = 1 \end{cases}$
Resolvendo estas equações, acha-se a matriz inversa que é $\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Usando determinantes: Outros métodos (extraídos do excelente site `http://mathworld.wolfram.com`) vão a seguir descritos: Dada uma matriz 2×2 representada por $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, a inversa é dada por
$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix}$.

Para uma matriz 3×3 veja lá no site, que o espaço aqui é muito pequeno.

Usando Gauss-Jordan: Neste método escreve-se a matriz da qual se quer achar a inversa ao lado esquerdo da matriz identidade, formando este arranjo (matriz escalonada reduzida por linhas). $[AI] = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} & 1\ 0 \dots 0 \\ a_{21} \dots a_{2n} & 0\ 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} & 0\ 0 \dots 1 \end{vmatrix}$

Aplica-se agora a este arranjo as técnicas de eliminação de Gauss, sobre o conjunto todo, de maneira a ficar com o seguinte arranjo $\begin{vmatrix} 1\ 0 \dots 0 & b_{11} \dots b_{1n} \\ 0\ 1 \dots 0 & b_{21} \dots b_{2n} \\ \dots & \dots \\ 0\ 0 \dots 1 & b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix}$

Neste ponto, a matriz (b_{ij}) é a matriz inversa de A. Ou seja $A^{-1} = B$ e também $AB = I$.

☞ Para você fazer

1. Ache o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$
2. Resolva o sistema de 2 equações e 2 incógnitas definido por $\begin{cases} -9x - 2y = -67 \\ 4x - 4y = 20 \end{cases}$ usando determinantes. Responda N_x e y para este sistema.
3. Ache o determinante $\begin{vmatrix} 3 & -3 & 6 \\ -9 & 4 & 4 \\ 9 & -4 & -8 \end{vmatrix}$
4. Resolva o sistema de 3 equações e 3 incógnitas definido por $\begin{cases} 2x + 9y + 8z = 45 \\ 9x - 6y + 2z = 70 \\ 5x + 7y + 3z = 23 \end{cases}$ usando determinantes. Responda N_x, y e N_z para este sistema.
5. Ache a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ e responda os valores da segunda coluna (com 2 decimais).
6. Ache a matriz inversa de $\begin{pmatrix} -9 & -9 & 6 \\ -8 & 5 & 2 \\ -7 & -3 & -8 \end{pmatrix}$ e responda a SOMA da segunda coluna (com 2 decimais)

1.d	2.N_x	2.y	3.d	4.N_x
4.y	4.N_z	5.l = 1	5.l = 2	6.$soma$