Funções

Supondo-se que a cada elemento do conjunto A está associado um único elemento do conjunto B. A coleção f de tais associações é denominada função de A em B e é indicada por

$$f : A \to B$$

O único elemento em B associado a $a \in A$ por f é denotado $f(a)$ e denominado a *imagem* de a por meio de f, ou o valor de f em a. O *domínio* de f é A e o contradomínio é B. A imagem da função f, indicada por $f[A]$ é o conjunto das imagens dos elementos de A ou

$$f[A] = \{f(a)/a \in A\}$$

Por exemplo, suponhamos associar a cada número real o seu cubo. Assim, dado x, real tem-se $f(x) = x^3$. Neste caso a imagem de 2 é 8 e pode-se escrever $f(2) = 8$ ou então $f : 2 \to 8$.

Outro exemplo, suponha-se associar cada estado brasileiro com a sua capital. Neste caso, o domínio é o conjunto de estados brasileiros. O contradomínio é o conjunto de capitais. A imagem do Paraná é Curitiba, isto é $f(Parana) = Curitiba$.

Propriedade fundamental

Um subconjunto f de $A \times B$ isto é, uma relação de A em B é uma função se possui a seguinte propriedade:

> Cada $a \in A$ aparece como primeira coordenada em exatamente um par ordenado (a, b) em f. Consequentemente se $(a, b) \in f$ então $f(a) = b$.

Uma função a valores reais $f : R \to R$ na forma

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

é denominada *função polinomial*. O gráfico de tal função é esboçado representando graficamente vários pontos e traçando uma curva contínua suave que passa por eles.

Função composta

Considere-se agora as funções $f : A \to B$ e $g : B \to C$

Seja $a \in A$ então, sua imagem $f(a)$ está em B que é o domínio de g. Portanto, podemos achar a imagem de $f(a)$ por meio da função g isto é $g(f(a))$. A função de A em C que associa a cada $a \in A$ o elemento $g(f(a)) \in C$ é denominada a composta ou o produto de g e g e é indicada por $g \circ f$. Assim, por definição

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Seja R o conjunto dos reais e sejam $f : R \to R$ e $g : R \to R$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x+3$. Então:
$f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(5) = 25$
$g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 7$

Note-se que as compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ não são a mesma função. A seguir, fórmulas gerais para estas funções:
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 3$

Função injetora e sobrejetora

Uma função $f : A \to B$ é dita *injetora* se elementos diferentes no domínio tem imagens distintas. Ou seja, $f : A \to B$ é injetora se

$$f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

Uma função $f : A \to B$ é dita *sobrejetora* se $\forall b \in B$ é imagem de algum $a \in A$. Assim, $f : A \to B$ é sobrejetora se e somente se a imagem de f é todo o contradomínio, isto é $f[A] = B$

Seja R o conjunto dos reais e sejam $f : R \to R$, $g : R \to R$ e $h : R \to R$ definidas por $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^3 - x$ e $h(x) = x^2$. a função f é injetora. Geometricamente isto significa que cada reta horizontal não contém mais de um ponto de f. A função g é sobrejetora. Geometricamente isto significa que cada reta horizontal contém pelo menos um ponto de g. A função h não é injetora nem sobrejetora, pois $h(2) = h(-2) = 4$ isto é, dois elementos 2 e -2 têm a mesma imagem 4 e $h[R]$ é um subconjunto próprio de R, por exemplo $-16 \notin h[R]$.

Função inversa e função idêntica

Em geral a função inversa f^{-1} de uma função $f \subset A \times B$ não é necessariamente uma função. Contudo, se f for injetora e sobrejetora (isto é bijetora) então f^{-1} será uma função de B sobre A e é denominada a função inversa de f.

Para qualquer conjunto A a função $f : A \to A$ definida por $f(x) = x$ que associa a cada elemento de A o próprio elemento é denominada a função idêntica de A e é geralmente indicada por 1_A ou simplesmente por 1. Esta função coincide com a relação diagonal $1_A = \triangle_A$.

Funções Piso e Teto

Estas funções foram originalmente propostas pelo criador da linguagem APL, o canadense Kenneth Iverson no final dos anos 60. Ele disse ter usado o símbolo do "colchete" na sua máquina de escrever depois de ter limado um pequeno canto do símbolo.

Piso A função piso, é denotada por $\lfloor$ e quando aplicada a um número real, devolve o próximo inteiro igual ou menor à esquerda na reta numerada. Quando o operando já é um inteiro a função piso não altera o operando. Em outras palavras o piso de um inteiro é o próprio.

Acompanhe alguns exemplos:
$\lfloor 3.14 = 3$ $\lfloor 3.99 = 3$ $\lfloor 2.01 = 2$
$\lfloor 5 = 5$ $\lfloor -3.1 = -4$
Neste último exemplo (operando negativo) fica evidente o uso do recurso da reta numerada e de como ele ajuda a entender a função.

Teto A função teto, é denotada por $\lceil$ e quando aplicada a um número real, devolve o próximo inteiro igual ou maior, à direita na reta numerada. Quando o operando já é um inteiro a função teto não altera o operando. Em outras palavras o teto de um inteiro é o próprio.

Acompanhe alguns exemplos:
$\lceil 3.14 = 4$ $\lceil 3.99 = 4$ $\lceil 2.01 = 3$
$\lceil 5 = 5$ $\lceil -3.14 = -3$
Note que quando o teto de um número é igual ao seu chão, isto implica em que o número é inteiro. Em caso contrário $(\lfloor x) + 1 = \lceil x$.

Valor absoluto

O valor absoluto de um número real x, denotado por $|x|$ é definido como o maior valor entre x e $-x$. Em outras palavras ele sempre devolve o operador positivo (sem sinal). Observe-se que $|x| = |-x|$ e para $x \neq 0, |x|$ é positivo.

Função Exponencial

Relembrando os expoentes inteiros, tem-se $a^m = a \times a \times ... \times a$ (m vezes). Também, $a^0 = 1$ e $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$. Generalizando para expoentes racionais, define-se para qualquer racional m/n, $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt{a})^m$. Expoentes são estendidos para qualquer número real definindo-se para um real x, $a^x = \lim_{r \to x} a^r$, onde r é um número racional. Do que se viu, $f(x) = a^x$ é definida para todos os números reais.

Função Logaritmo

O logaritmo é a função inversa da função exponencial, desde que, se o logaritmo de x na base b é igual a N, então pode-se escrever que $b^N = x$. Esta relação é tão importante que merece ser destacada

$$b^N = x \quad \Rightarrow \quad \log_b x = N \quad \Rightarrow \quad b^N = x$$

Daqui,
$\log_2 8 = 3$ pois $2^3 = 8$
$\log_{10} 10000 = 4$ pois $10^4 = 10000$
$\log_2 1024 = 10$ pois $2^{10} = 1024$
$\log_{10} 0.001 = -3$ pois $10^{-3} = 0.001$

Em qualquer base b, tem-se $b^0 = 1$ e $b^1 = b$, logo $\log_b 1 = 0$ e $\log_b b = 1$.

Lembre-se que o logaritmo de um número negativo não é definido e o logaritmo de 0 também não é definido.

Somatórios

Em textos matemáticos é comum o surgimento da operação *somatória* que é representada pela letra grega sigma ($\sum$).

Considere a sequência a_1, a_2, ..., a_n. Se por alguma razão for necessário obter a soma dessa sequência como em $a_1 + a_2 + ... + a_n$, tal operação poderá ser representada por

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \;=\; a_1 + a_2 + ... + a_n$$

que deve ser lido como somatório da expressão a índice i com i variando entre 1 e n.

☞ Para você fazer

Funções Suponha as seguintes funções:

$$f(x) = x^3 - 17$$

$$g(x) = \lceil((\log_{10} |x|)^2)$$

$$h(x) = \lceil(55 \times \; sen(x))$$

$$m(x) = 3x^2 + 2x - 9$$

1. Calcule $f(-5)$
2. Calcule $g(-3)$
3. Calcule $h(6)$
4. Calcule $m(3)$
5. Calcule $(4 \times f(2)) + (2 \times g(3))$

Somatórias Suponha as seguintes somatórias:

6.
$$\sum_{k=5}^{9} 2k^2$$

7.
$$\sum_{y=5}^{6} (3y^2 + 10)$$

8.
$$\sum_{y=3}^{7} (4y + 15)$$

9.
$$\sum_{i=3}^{7} 16 \times (i + 1)$$

10.
$$\sum_{k=4}^{7} k$$

Calcule as somatórias pedidas e responda no local adequado.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

PS: não esqueça que em $sen(x)$ e $cos(x)$, x está em radianos.