UFPR - UP - UTFPR - PUCPr – 11/02/2019 - 12:35:46.3
Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)
Sistemas Lineares: Método de Gauss VIVO735x, V: 1.05 1
- 1 _____ / _____ / _____

Sistemas Lineares: Método de Gauss

Uma equação é linear se cada um de seus termos contém não mais do que uma variável e se cada variável aparece na primeira potência. Por exemplo $3x+2y+3z=8$ é linear, mas $3x+2yz+3w=27$ não é, pois o segundo termo tem yz e também $2x^2+4y+5z=90$ também não é linear, pois aparece x^2.

Vamos considerar n equações lineares com n incógnitas e vamos nos referir a esse conjunto como um Sistema Linear de ordem n. Uma solução para tal sistema é um conjunto de n valores para as incógnitas, de maneira a que quando esses valores substituem as variáveis nas esquações, todas elas são simultaneamente satisfeitas. Por exemplo, o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & 3y & - & 4z & = & 9 \end{array}\right.$$

tem a solução $x=1$, $y=1$ e $z=-1$. Você pode verificar e se certificar disso substituindo estas variáveis no sistema. O mesmo sistema também pode ser escrito na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Para quem, como nós, conhece a multiplicação matricial, o sistema acima também pode ser escrito como

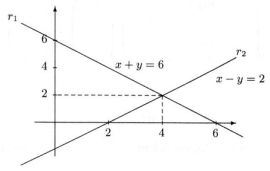
$$A.x = b,$$

onde A é chamada Matriz de Coeficientes, b é o termo independente e x é o vetor solução. Dado um sistema linear qualquer o mesmo pode ser classificado em termos do número de soluções que ele admite:

- Sistema possível com solução única. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 6 \\ x & - & y & = & 2 \end{array}\right.$$

Este sistema, que pode ser representado na figura

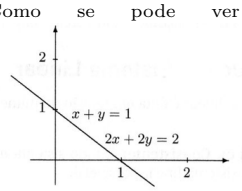


admite uma única solução, representada pelo ponto $(4,2)$.

- Sistema possível com infinitas soluções. Por exemplo, seja

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura

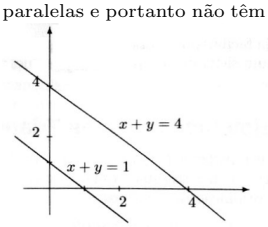


as soluções são infinitas (sobre toda a linha)

- Sistema impossível, sem solução. Por exemplo

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 4 \end{array}\right.$$

Como se pode ver na figura, as retas são paralelas e portanto não têm ponto comum.



Método do escalonamento de Gauss

Resolver um sistema linear $A.x = b$ é achar um sistema equivalente $A'.x = b'$ que tenha solução imediata, ou pelo menos mais simples do que o sistema original. Dois sistemas são ditos equivalentes se, embora diferentes, têm a mesma solução. As operações que são realizadas sobre os sistemas e que não lhes alteram as soluções, são:

- Trocar uma linha (equação) de lugar com outra.
- Multiplicar uma linha (equação) por uma constante
- Trocar uma linha por uma soma de 2 linhas

Seja por exemplo, resolver o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 4y & + & 4z & = & 23 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 27 \\ 2x & + & 5y & + & 2z & = & 25 \end{array}\right.$$

Passando para uma matriz mais simples

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 2 & 5 & 2 & 25 \end{array}\right)$$

aplicando à terceira linha a propriedade que diz $L_3 = L_3 - p.L_1$ e escolhendo p de modo que surja um zero na primeira posição da linha, fica:$2, 5, 2, 25 - p.1, 4, 4, 23$ e escolhendo $p = 2$, a nova linha passa a ser $0, -3, -6, -21$ e a matriz fica:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 3 & 3 & 1 & 27 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array}\right)$$

aplicando à segunda linha a propriedade que diz $L_2 = L_2 - p.L_1$ e fazendo $p = 3$ para que surja um zero na primeira posição e a linha fica: $3, 3, 1, 27 - p.1, 4, 4, 23$. Com $p = 3$, a nova linha fica sendo $0, -9, -11, -42$ e a matriz agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & -3 & -6 & -21 \end{array}\right)$$

Finalmente, elimina-se o -3 na matriz acima de maneira a deixar a matriz escalonada: $L_3 = L_3 - p.L_2$ e fazendo $p = 0.333333$, a segunda linha fica sendo $0, 0, -2.33333, -7$ e a matriz escalonada agora é:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & 23 \\ 0 & -9 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -2.33333 & -7 \end{array}\right)$$

Examinando a última linha, percebe-se que $z = \frac{-7}{-2.3333} = 3$. Levando este valor para a linha anterior, acha-se $y = 1$ e levando os dois valores na primeira linha, acha-se $x = 7$. Ou seja, o vetor $\{7, 1, 3\}$ é a solução procurada do sistema. O algoritmo em Python que resolve este sistema é

```
def gauss(a,b):
    n=len(b)
    x=[0]*n
    for passo in range(0,n-1):
        for i in range(passo+1,n):
            pivot=a[i,passo]/a[passo,passo]
            for j in range(0,n):
                a[i,j]=a[i,j]-(pivot*a[passo,j])
            b[i]=b[i]-pivot*b[passo]
    x[n-1]=b[n-1]/a[n-1,n-1]
    for i in range(i,-1,-1):
        x[i]=b[i]
        for j in range(i+1,n):
            x[i]=x[i]-a[i,j]*x[j]
        x[i]=x[i]/a[i,i]
    return(x)
import numpy as np
a=np.array([[3.0,-1,1],[1,2,-1],[4,-2,-1]],float)
b=np.array([11.0,6,-5],float)
x=gauss(a,b)
print(x)
```

O Python é espetacular Se seus dados forem complexos, o mesmo programa acima os resolve. Veja-se por exemplo

```
a=np.array([[1+2j,-3j,5],[2+3j,1+1j,1-1j],
     [4,2j,3-2j]])
b=np.array([10-16j,-5+12j,13+2j])
x=gauss(a,b)
```

Note que o número $1+j$ é escrito como `1+1j` e não como `1+j`. A execução dará como resposta:

```
===== RESTART: C:\p\ufpr\ci202\gauss1.py =====
[[1.+2.j -0.  -3.j   5.       +0.j        ]
 [0.+0.j  1.6 +5.8j -7.       +0.j        ]
 [0.+0.j  0.  +0.j   5.4198895+1.97790055j]]
---------------
[ 10. -16.j   -17.8+39.6j
  24.17127072-15.74585635j]
---------------
[(2.999999999999999+4j),
(2.0000000000000004+1.494200711594962e-15j),
(2.999999999999999-3.9999999999999996j)]
```

Sendo que a resposta procurada é 3+4j, 2 e 3-4j.

☞ Para você fazer

Resolva pelo método de Gauss o sistema abaixo. Anexe a listagem do seu programa (inédito !).

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 5 & 1 & 3 & 39 \\ 3 & 7 & 3 & 4 & 4 & 46 \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 7 & 59 \\ 6 & 6 & 2 & 5 & 6 & 67 \\ 7 & 3 & 3 & 7 & 2 & 55 \end{array}\right)$$

VALORES INTEIROS:

x	y	z	w	t