Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)

______ / ______ / ______

Tentativas independentes

Seja $S*$ um espaço finito de probabilidades. Por n *tentativas independentes* ou *repetidas* quer se dizer o espaço S formado por n-uplas ordenadas de elementos de $S*$ com a probabilidade de uma n-upla definida como sendo o produto das probabilidades de suas componentes, ou

$$P(s_1, s_2, ..., s_n) = P(s_1) \times P(s_2) \times ... \times P(s_n)$$

Um processo de tentativas independentes é um processo estocástico cujo diagrama de árvore tem as seguintes propriedades

1. todo ponto tem os mesmos resultados possíveis e
2. a probabilidade é a mesma para cada ramo que conduz ao mesmo resultado

Dois resultados

Vai-se investigar agora tentativas repetidas de um experimento com 2 resultados. Um deles é chamado *sucesso* consequentemente o outro é o *fracasso*. Se p é a probabilidade de sucesso, então $q = 1 - p$ é a probabilidade de fracasso. Se se está interessado no número de sucessos e não na ordem em que eles ocorrem, vale o teorema que diz que a probabilidade de exatamente k sucessos em n tentativas independentes é indicada por $f(n, k, p)$ e é dada por

$$f(n, k, p) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \times p^k \times q^{n-k}$$

Se se considerar n e p constantes, a função definida por $f(n, p, k)$ é denominada *distribuição binomial* uma vez que para $k = 0, 1, 2, ...n$ ela corresponde aos termos consecutivos do desenvolvimento binomial

$$(q + p)^n = q^n + \left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) q^{n-1} p + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right)$$

$$q^{n-2} p^2 + ... + p^n$$

$$= f(n, 0, p) + f(n, 1, p) + f(n, 2, p) + ... + f(n, n, p)$$

Esta distribuição também é denominada distribuição de Bernoulli e tentativas independentes com dois resultados são chamadas tentativas de Bernoulli.

Variáveis Aleatórias

Seja S o espaço amostral de um determinado experimento. Nem sempre os resultados do experimento (ou os pontos de S) precisam ser números. Contudo é comum associar um número específico a cada resultado. Essa associação é chamada uma *variável aleatória*.

Tem-se assim a definição: Uma variável aleatória X é uma função do espaço amostral S no conjunto dos números reais. Indica-se por R_x a imagem de uma variável aleatória $X : R_x = X(S)$. R_x será chamado espaço-imagem.

Note-se que se o espaço amostral S é não enumerável certas funções definidas em S não são variáveis aleatórias. Mas todo espaço aqui descrito é finito e toda função definida num espaço amostral finito é uma variável aleatória.

Distribuição de uma variável aleatória

Seja $R_x = \{x_1, x_2, ..., x_t\}$ o espaço imagem de uma variável aleatória X definida num espaço amostral finito S. Então X induz a uma associação de probabilidades no espaço-imagem R_x como segue: $p_i = P(x_i)$ = soma das probabilidades dos pontos de S cuja imagem é x_i. A função que associa p_i a x_i ou em outras palavras o conjunto dos pares ordenados $(x_1, p_1), ..., (x_t, p_t)$ em geral é dado por uma tabela

x_1	x_2	...	x_t
p_1	p_2	...	p_t

e é denominada *distribuição* da variável aleatória X

No caso em que S é um espaço equiprovável, então $p_i = P(x_i) = \frac{numero\ de\ pontos\ de\ S\ cuja\ imagem\ e\ x_i}{numero\ de\ pontos\ de\ S}$

A distribuição de X quando há n tentativas independentes de um experimento com 2 resultados possíveis, sucesso e fracasso que é a distribuição binomial é

x_i	0	1	2	...	n
p_i	q^n	$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) q^{n-1} p$	$\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) q^{n-2} p^2$	...	p^n

Valor Esperado

Se os resultados possíveis de um experimento são $x_1, x_2, ..., x_r$ que ocorrem com probabilidades $p_1, p_2, ..., p_r$ respectivamente, então o valor esperado E é definido como sendo

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_r p_r$$

em particular, se os x_i e p_i provêm da distribuição de uma variável aleatória X então o valor esperado é denominado *esperança da variável aleatória* e é indicado por $E(X)$.

Para a distribuição binomial

x_i	0	1	2	...	n
p_i	q^n	$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) q^{n-1} p$	$\left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) q^{n-2} p^2$	...	p^n

o valor esperado é

$$E = np$$

Jogos de Azar

Num jogo de azar, o valor esperado E é considerado o valor do jogo para o jogador. O jogo é dito favorável ao jogador se $E > 0$, desfavorável se $E < 0$ e honesto se $E = 0$.

Este resultado pode ser generalizado pela definição: Se E é o valor esperado de um experimento, e se uma constante k é somada a cada resultado do experimento, então o valor esperado $E*$ do novo experimento é $E + k$, ou

$$E* = E + k$$

☞ Para você fazer

1. Retiram-se dois cartões de uma caixa contendo 5 cartões numerados 1,1,2,2 e 3. Seja X a variável aleatória que indica a soma dos dois números. Determinar a esperança de X.
2. Uma carta é retirada e recolocada três vezes em seguida em um baralho comum de 52 cartas. Determinar a probabilidade de que sejam retiradas três cartas de copas.
3. Calcule
$$f(4, 2, \frac{1}{4})$$
4. Lançam-se dois dados honestos. Seja X a variável aleatória que indica o mínimo dos dois números que ocorrem. Determine a esperança de X
5. Lançam-se 5 moedas honestas. Seja X a variável aleatória que indica o número de CARAS que ocorre. Determine a distribuição de X.
6. Calcule
$$f(5, 1, \frac{1}{3})$$
7. Uma loteria de 500 bilhetes dá um prêmio de 1000 reais, 3 de 500 reais cada um e 5 prêmios de 250 reais cada um. Determinar o ganho esperado por bilhete.
8. Determinar o número esperado de meninas numa família de 6 crianças admitindo que a distribuição por sexo seja igualmente provável. Qual a probabilidade de que o número esperado de meninas realmente ocorra ?
9. Um homem encontra-se na origem. Ele lança uma moeda. Se dá cara ele caminha uma unidade para a direita. Se dá coroa ele anda uma unidade para a esquerda. Se X é a variável aleatória que indica sua distância até a origem após 4 lançamentos, indique a esperança de X.
10. Calcule
$$f(7, 2, \frac{1}{2})$$

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10