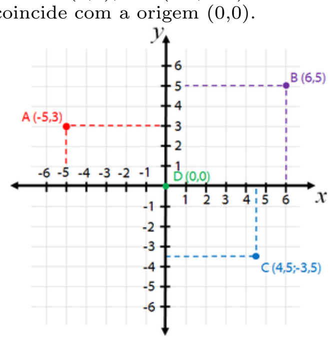
Prática em eixos cartesianos

Suponha um ambiente representado em 2 dimensões. Pode ser um mapa de estradas, uma planta de apartamento, um mapa de caça ao tesouro, um diagrama de linhas do metro ou qualquer coisa semelhante.

Uma maneira prática de localizar pontos em tais diagramas é pelo uso de eixos cartesianos. Trata-se de duas retas orientadas, perpendiculares entre sí, que se cruzam em um ponto qualquer denominado origem. As retas são numeradas a partir da origem com números positivos em um sentido (cima e direita) e com números negativos no outro sentido (baixo e esquerda).

A partir daí, qualquer ponto pode ser localizado, bastando traçar sobre o ponto paralelas aos dois eixos e anotando em que lugar dos eixos tais paralelas os cruzam. Veja por exemplo na figura abaixo, 4 pontos assinalados: o ponto A tem como coordenadas os números (-5,3). O ponto B tem coordenadas (6,5), o C (4.5,-3.5) e finalmente o ponto D coincide com a origem (0,0).



O eixo horizontal é chamado eixos das abcissas, ou eixo x e sempre corresponde ao primeiro número do par. O eixo vertical é chamado eixo das ordenadas, ou eixo y e corresponde ao segundo número do par. Note que os números podem ser positivos, negativos, inteiros ou não.

O eixo é chamado cartesiano em homenagem a René Descartes, um filósofo-matemático francês do século XVII. Entre outras criações ele inventou a geometria analítica que vem a ser o casamento entre álgebra e a geometria e que representa suas maravilhas sobre o palco dos eixos cartesianos. Conta a lenda que ele teria tido o *insight* da geometria analítica ao observar, deitado numa cama, o teto do aposento no qual uma mosca andava. Sua mente matemática via a mosca mas enxergava um ponto se movendo. A pergunta: haverá uma função que descreva o caminho da mosca ? deu origem a esta fantástica construção.

Modernamente, graças à proliferação de dispositivos de geo-localização baratos (GPS), tem tido crescimento exponencial os sistemas que fazem georreferenciamento de pontos. Explica-se: qualquer coisa em nosso planeta têm uma localização fixa em relação a dois eixos: a linha do equador e o meridiano de Greenwich. No caso da Terra, tais medidas são chamadas latitude (N=acima do equador e S=abaixo) e longitude W (à esquerda do meridiano de Greenwich – para quem olha o mapa, e L à direita). As medidas são aquelas da circunferência: graus, minutos e segundos.

Por exemplo, Curitiba se localiza a 25^o 26' S e 49^o 16' W. Em alguns contextos o Sul é representado por um número negativo e o Oeste por um positivo, ficando -25^o 26' e +49^o 16'. As medidas podem ser precisas, chegando a uma resolução de centímetros na superfície terrestre. No futuro, todos os quase todos os sistemas de informação vão agregar o geo-referenciamento de dados, razão pela qual vale a pena estudar o sistema e praticar nele.

Prática

A seguir uma lista de 10 exercícios envolvendo questões relativas aos eixos cartesianos.

⋆ **1. Área de retângulo:** Suponha que um retângulo é dado por 4 números: Os dois primeiros são as coordenadas (X, Y) do canto superior esquerdo e os dois últimos são as coordenadas do canto inferior direito. Sabe-se que os lados do retângulo sempre serão paralelos aos eixos. Pergunta-se a seguir qual a área do retângulo. Relembrando, a área de um retângulo de lados a e b é o produto $a \times b$. Logo, o primeiro a descobrir é o comprimento de cada aresta. Assim, o retângulo 2,5,5,3 tem arestas de $5-3=2$ e de $5-2=3$. Logo a área é $2 \times 3 = 6$ ou área de 6 u.a. (unidades de área).

⋆ **2. Área de triângulo:** Suponha que um triângulo é dado por 3 pares de números. Cada par representa um dos pontos do triângulo. Neste problema, uma das arestas do triângulo sempre vai ser paralela a um dos eixos. Isso vai facilitar as coisas. A área de um triângulo é $T = \frac{b \times h}{2}$. Seja o exemplo: achar a área do triângulo 2,5; 2,-1; 8,1. Desenhando-o descobre-se que a base pode ser a aresta 2,5 a 2,-1, já que ela é paralela ao eixo y e isto facilita o cálculo da altura que é $8-2=6$. Assim, a área é $(6 \times 6) \div 2 = 18$ u.a.

⋆ 3. **Área de um círculo:** Suponha que um círculo é dado por 2 pontos: seu centro e um ponto qualquer situado na circunferência do círculo. Voltando à geometria analítica, uma circunferência é dada por uma aplicação imediata do Teorema de Pitágoras, ou $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = R^2$, onde (α, β) são as coordenadas do centro e R é o raio da circunferência. Neste caso, o que nos interessa é a fórmula da área de um círculo que é $C = \pi \times R^2$. Para o cálculo do raio, basta achar a distância entre o centro (dado) e um ponto qualquer (também dado). Usa-se o Teorema de Pitágoras, sempre ele. Eis um exemplo: seja o círculo dado por 0, -3, -6, -5; onde o centro é 0,-3 e um ponto qualquer da circunferência é -6,-5. A área do circulo é 125 u.a.

⋆ **4. Pontos internos:** Neste exercício, você vai receber 10 pontos (pares de números). deve desenhar a envoltória convexa dos pontos e descobrir quantos pontos estão DENTRO dessa envoltória. Pense numa tábua. Desenhe os eixos nessa tábua e marque os 10 pontos. Pregue um prego em cada ponto. Passe um elástico pelos pontos mais externos. O elástico é a envoltória convexa. Os pontos que NÃO encostam no elástico são os pontos internos, que podem ser no máximo 7 (porquê ?). Seja o exemplo: 1 -8, -5 -9, -8 7, 8 -4, 7 -4, -7 -9, 9 -4, 4 -2, 1 -9 e 1 7. Neste caso há 4 pontos internos à envoltória.

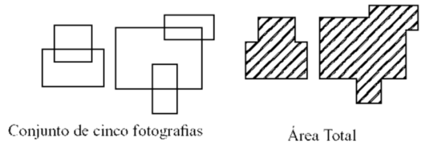
⋆ **5. O triângulo contém a origem ?:** Agora você vai receber um triângulo (3 pares de números) e deve dizer 1 para SIM ou 0 para NÃO se o triângulo contiver ou não a origem dos eixos. Em outras palavras, se o ponto (0,0) estiver dentro do triângulo, responda 1. Se o ponto (0,0) estiver fora do triângulo, responda 0. Por exemplo, seja o triângulo -6 6, -1 1 e -5 2. Tal triângulo não engloba a origem, logo a resposta é 0.

⋆ **6. Pontos por quadrante:** As regiões do plano delimitada pelos eixos são chamadas quadrantes. Há o primeiro, acima do eixo x e à direita do eixo y, o segundo, (acima do x e à esquerda do y), o terceiro (abaixo de x e à esquerda de y) e finalmente o quarto quadrante que fica abaixo do x e à direita do y. Neste exercício você vai receber 10 pontos e deve dizer quantos estão em cada um dos 4 quadrantes, somando esse resultado depois. Note que se um ponto está sobre um eixo, ele pertence aos dois quadrantes que são definidos pelo eixo em questão. Na situação limite, o ponto (0,0) pertence aos quatro quadrantes. Seja por exemplo, -3 -7, -4 -4, 0 -4, -6 8, 6 -7, -9 -3, 5 9, 0 0, 7 2 e -7 7. A resposta é 3,3,5,3 ou a sua soma 14.

⋆ **7. Qual o ponto mais distante da origem ?:** Neste exercício, você vai receber 5 pontos (pares) e deve dizer qual dos 5 pontos é o mais distante da origem. A solução está no Teorema de Pitágoras aplicado a cada ponto. Note que a distância em questão é a hipotenusa de um triângulo cujos lados estão sobre os eixos x e y. Por exemplo, 5 -4, 1 2, 9 -7, -5 -9 e -3 8. Neste caso, o ponto mais distante é o 3 (ou seja 9 -7).

⋆ **8. Qual o ponto mais próximo ao mestre ?:** Dado um ponto mestre e 5 pontos acessórios, a pergunta agora é qual o ponto acessório que está mais perto do ponto mestre. É uma generalização do caso anterior (lá o mestre coincidia com a origem). O raciocínio é o mesmo, mas os lados do triângulo são dados pela subtração das coordenadas do acessório e do mestre, antes de usar o Teorema de Pitágoras. Seja o exemplo: Ponto mestre é -1 -9. Os pontos acessórios são 4 1, -6 -5, -4 8, 0 -7 e 7 5. O mais próximo é o ponto acessório 4 (ou 0 -7).

⋆ **9. Área coberta pela fotogrametria:** Uma cidade contratou um serviço de aerofotogrametria. Inúmeras fotos foram tiradas de avião. As fotos sempre são retangulares, mas devido a diferentes altitudes em que foram tomadas têm tamanhos diferentes entre sí. No exercício aparecem 5 fotos cuja área é descrita por 2 pontos (X_1, Y_1, X_2, Y_2), sendo o primeiro par (X_1, Y_1) o canto superior esquerdo e o segundo par (X_2, Y_2) o canto inferior direito da foto. O problema é que algumas áreas da cidade aparecem em mais de uma foto e portanto precisam ser descontadas da área final. veja um caso típico em que isto acontece:



Seja o exemplo. Fotos: 20 40 32 26, 3 24 9 6 e 21 37 37 27. A área coberta é de 326 u.a.

⋆ **10. Com qual namorada ?:** Patrico mora na cidade de Ó de Cima (x=108, y=593 no mapa). Tem 4 namoradas: Gloria que mora em Trobobó (577,139); Lu que mora em Gloriba (283,532), Cristalda que mora em Cá de Judas (105,318) e Patrícia que mora a 431 u.d. de Patrico. A pergunta é: qual a namorada que mora mais perto dele ? A resposta é a Lu.

☞ Para você fazer

1. Qual a área do retângulo -5, 9, 7, 1 .
2. Qual a área do triângulo -4, 5; -8, 1; -4, -3 .
3. Qual a área do círculo C= -4, -3.P=-9, 5 .
4. Quantos pontos internos à envoltória do conjunto -2,-2; 2, 9; 9, 6;-6,-2;-1,-8; 4,-2;-1, 7;-8,-7;-2,-1;-4, 1 .
5. O triângulo abaixo contém (R=1) ou não contém (R=0) a origem ? 1, 4; -9, -7; -8, -3 .
6. Ache quantos pontos há em cada quadrante. Depois some este número de pontos. -1, 8;-9,-7; 3, 5;-2, 4; 6,-4;-7,-6; 8, 5; 9,-2;-6, 6; 0, 3 .
7. Qual o número (1 a 5) do ponto mais distante da origem ? -6,-5; 5,-7; 6,-2;-9, 1; 2, 8 .
8. Se o ponto mestre é 0, 9 , qual o número (1 a 5) do ponto acessório mais próximo ao ponto mestre ? -1,-3; 3, 4; 5, 7;-6,-5; 8,-2 .
9. Dadas 3 fotografias, qual a área total coberta pelas fotos ? 24 38 28 25; 12 38 36 30; 21 39 37 36 .
10. Qual o ser amado mais próximo ? Beto mora em Ufala (X= 136, Y= 310). Ele tem 4 namoradas: Astrid mora em Jardinzinho (X= 466, Y= 260), Judith mora em Cajatinho (X= 242, Y= 121), Flavinha mora em O de cima (X= 574, Y= 230) e Arminda mora a 469 quilômetros da cidade dele. Qual o nome da namorada que mora mais perto dele ? .

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10