

Algumas demonstrações úteis

P. Kantek

9 de outubro de 2020

Sumário

Fórmula de Baskara

O objetivo aqui é resolver uma equação de segundo grau, cuja forma é $ax^2 + bx + c = 0$. Note, que devido a presença do x^2 não se consegue facilmente isolar o x como se faria em uma equação linear.

Começando Com a equação acima descrita $ax^2 + bx + c = 0$

Colocando a em evidência para as duas primeiras parcelas, fica

$$a \left(x^2 + \frac{bx}{a} \right) + c = 0$$

Somando e subtraindo a mesma coisa Como se sabe, a equação não se altera. O objetivo é construir um quadrado perfeito. O termo a somar é $(\frac{b}{2a})^2$ e fica

$$a \left(x^2 + \frac{bx}{a} + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 \right) + c = 0$$

Fatorando Lembrando que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ faz-se

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - (\frac{b}{2a})^2 \right) + c = 0$$

aplicando o a na segunda parcela , fica

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right) - \frac{b^2}{4a} + c = 0$$

Passando para o segundo membro , fica

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c$$

dividindo tudo por a , fica

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

mínimo múltiplo comum no segundo termo, que é $4a^2$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

extraíndo a raiz

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

e agora

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$$

e

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

passando a segunda parcela do primeiro termo para o segundo termo da igualdade fica

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

mmc

$$x = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$$

Reorganizando e lembrando que ao extrair uma raiz quadrada deve-se considerar tanto o resultado positivo quanto o negativo fica

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

CQD

Derivada do seno

Para treinar demonstrações, vai-se agora demonstrar a derivada da função $\text{sen}(x)$.

1. Seja calcular $\frac{d}{dx}[f(x)] =$

2. Da definição: $\frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

3. Aplicando $\text{sen}(x)$ fica: $\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}(x)}{h}$

4. Aplicando a fórmula da soma do seno que diz $\text{sen}(a+b) = \text{sen}(a)\cos(b) + \cos(a)\text{sen}(b)$, fica:
 $\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\text{sen}(h) - \text{sen}(x)}{h}$

5. Aplicando a propriedade da soma de limites que diz $\lim(a+b) = \lim(a) + \lim(b)$ e reorganizando a expressão, fica:
 $\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\text{sen}(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)\cos(h) - \text{sen}(x)}{h}$

6. Colocando $\text{sen}(x)$ em evidência no segundo termo, fica:
 $\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)\text{sen}(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)[\cos(h) - 1]}{h}$

7. $\cos(x)$ no primeiro limite e $\text{sen}(x)$ no segundo limite são constantes (não dependem de h) e podem ser postos em evidência:
 $\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] = \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} + \text{sen}(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h}$

8. sabendo que $a - 1$ pode ser reescrito como $-(1 - a)$ fica
 $\frac{d}{dx}[\text{sen}(x)] = \cos(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} - \text{sen}(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(h)}{h}$

9. Lembrando o limite fundamental $\lim_{a \rightarrow 0} \text{sen}(a)/a = 1$, que pode ser aceito por considerações geométricas e que tem excelente demonstração na academia Khan e em [Ste14].

10. Vamos provar $\lim_{a \rightarrow 0} (1 - \cos(a))/a = 0$:

(a) Supondo que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(t)}{t} = 1$

(b) Multiplicando numerador e denominador por $1 + \cos(a)$ fica:
 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(a))(1 + \cos(a))}{a(1 + \cos(a))} =$

(c) Lembrando que $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ fica
 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos^2(a))}{a(1 + \cos(a))} =$

(d) Da igualdade fundamental (Teorema de Pitágoras) $\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) = 1$ fica:
 $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(\text{sen}^2(a))}{a(1 + \cos(a))} =$

(e) Reescrevendo $\sin^2(t) = \sin(t)\sin(t)$ e reorganizando a expressão:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(a)}{a} \cdot \frac{\sin(a)}{1 + \cos(a)} =$$

(f) Agora, o limite de um produto é o produto dos limites

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(a)}{a} \cdot \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(a)}{1 + \cos(a)} =$$

(g) O primeiro limite, vimos acima, vale 1

(h) O segundo limite é fácil. Quando a tende a 0, o $\sin(a)$ tende a 0 e o $\cos(a)$ tende a 1. Substituindo o segundo limite é $\frac{0}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$. E $1 \times 0 = 0$

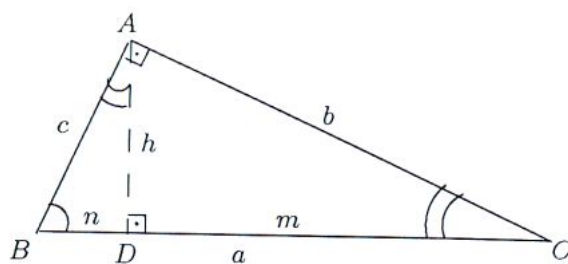
(i) Finalmente $\lim_{a \rightarrow 0} (1 - \cos(a))/a = 0$, CQD

11. Ufa, $\frac{d}{dx}[\sin(x)] = \cos(x)$

Teorema de Pitágoras

Há dezenas (centenas ?) de demonstrações, gráficas, geométricas, trigonométricas, basta procurar na Internet por elas. Vai-se mostrar aqui, talvez a mais simples e completa.

Suponha-se um triângulo $\triangle ABC$ reto em A e defina-se sua altura que intercepta a hipotenusa no ponto D conforme a figura



Tal altura acaba de criar 2 novos triângulos, a saber $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$ também retos, pela definição da altura de um triângulo.

Estes 3 triângulos $\triangle ABC$, $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$ são semelhantes, uma vez que os 3 são retângulos e compartilham 1 ângulo 2 a 2. Agora

Da semelhança entre $\triangle ABD$ e $\triangle ABC$ tem-se

$$\frac{c}{a} = \frac{n}{c}$$

Da semelhança entre $\triangle ADC$ e $\triangle ABC$ tem-se

$$\frac{b}{a} = \frac{m}{b}$$

Multiplicando em cruz ambas expressões fica

$$c^2 = an \quad e \quad b^2 = am$$

Somando essas duas expressões fica

$$c^2 + b^2 = an + am$$

Pondo em evidência a tem-se

$$c^2 + b^2 = a(n + m)$$

Mas, como $a = n + m$ pode-se substituir e fica

$$c^2 + b^2 = a.a = a^2$$

CQD