

## Casamento estável

Seja agora o problema de relacionar 2 conjuntos de elementos segundo um determinado critério. Este problema é conhecido na literatura como o casamento estável, uma vez que se usa da analogia com o casamento humano para apresentá-lo.

Como o algoritmo é complexo, antes de apresentá-lo, vamos ver um exemplo. Seja um grupo de 5 moças (Luiza, Joana, Maria, Josefa e Walquíria) e outro conjunto de rapazes (Simão, João, Alfredo, Ernesto e Sebastião). Na nossa analogia, os homens do grupo querem se casar com uma (e só uma) das mulheres e as mulheres com um (e um só) dos homens.

homem	Lista de mulheres com que ele gostaria de casar
Simão	Joana, Josefa, Walquíria, Luiza e Maria
João	Maria, Joana, Luiza, Josefa e Walquíria
Alfredo	Walquíria, Joana, Luiza, Maria e Josefa
Ernesto	Maria, Joana, Josefa, Walquíria e Luiza
Sebastião	Luiza, Joana, Maria, Walquíria e Josefa

Identicamente, foi pedido às mulheres que preparem lista similar. O resultado foi a lista de preferência das mulheres:

mulher	Lista de homens com que ela gostaria de casar
Luiza	João, Simão, Sebastião, Alfredo e Ernesto
Joana	Sebastião, João, Ernesto, Alfredo e Simão
Maria	Simão, Ernesto, João, Alfredo e Sebastião
Josefa	Simão, Sebastião, Alfredo, Ernesto e João
Walquíria	João, Alfredo, Ernesto, Sebastião e Simão

Note-se que, por exemplo João e Ernesto querem se casar com a Maria, enquanto Maria e Josefa querem se casar com Simão. É impossível contentar às 10 pessoas. Alguém terá que ceder. O algoritmo que veremos a seguir, verifica todos os casamentos possíveis apresentando os casamentos estáveis, bem como seu índice de perda para cada um dos casos. O índice de perda é calculado somando-se uma unidade a cada preferência descartada, incluindo a preferência aceita. Ou seja, se num dado casamento, 3 homens conseguiram sua primeira escolha, um deles só conseguiu a segunda e o último só a terceira, a perda dos homens será 8 (os três primeiros perdem 1, o quarto perde 2 e o quinto perde 3, logo  $1+1+1+2+3=8$ ). Nesse mesmo casamento, calcula-se também a perda das mulheres que geralmente é diferente da dos homens. Por hipótese, se aqui, apenas duas tivessem conseguido sua primeira opção, duas a segunda e a última apenas a terceira opção, a perda das mulheres seria de  $1+1+2+2+3=9$ .

O casamento, neste contexto é a formulação de k pares, com um elemento tirado de cada conjunto, onde k é o tamanho de cada um deles. Ele é dito instável quando para pelo menos um dos casais formados vale a regra:  $H_1$  está casado com  $M_1$ , e  $M_2$  está casada com  $H_2$ . Entretanto, na lista de preferências de  $H_1$ ,  $M_2$  aparece antes do que  $M_1$ . Identicamente, na lista de  $M_2$ ,  $H_1$  aparece antes do que  $H_2$ . Se não houver nenhum casal formado para o qual a regra acima seja válida, o casamento é dito estável.

O algoritmo será chamado para o primeiro homem da lista. Este será casado com todas as mulheres (na ordem de sua preferência), preservando-se o primeiro resultado que for estável. Feito isso, passa-se ao segundo homem (eis aqui a recursividade), e assim sucessivamente. Quando todos os homens estiverem casados, o resultado será impresso (com as correspondentes perdas), e se retorna na busca da próxima mulher que continuar tornando estável a união. Quando todas as possibilidades forem exauridas, o algoritmo acaba.

O resultado obtido para este conjunto de dados é

sol.	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>5</sub>	p. masc	p. fem
1	4	2	5	3	1	7	10
2	4	1	5	3	2	9	7

A melhor solução para os homens (perda mas=7) é formada por Simão-Josefa (p=2); João-Joana (P=2); Alfredo-Walquíria (P=1), Ernesto-Maria (P=1), Sebastião-Luiza (P=1). Esta mesma solução apresenta as seguintes perdas para as mulheres: Josefa-Simão (P=1); Joana-João (P=2); Walquíria-Alfredo (P=2), Maria-Ernesto (P=2), Sebastião-Luiza (P=3).

A melhor solução para as mulheres (perda fem=7) é formada por Josefa-Simão (P=1); Luiza-João (P=1); Walquíria-Alfredo (P=2); Maria-Ernesto (P=2) e Joana-Sebastião (P=1). Essa mesma solução apresenta as seguintes perdas para os homens: Simão-Josefa (P=2); João-Luiza (P=3); Alfredo-Walquíria (P=1); Ernesto-Maria (P=1) e Sebastião-Joana (P=2).

Dito isso, segue o algoritmo

```

1: função IMPRIME ()
2: inteiro I, PERDAHOM, PERDAMUL
3: PERDAHOM ← PERDAMUL ← 0
4: para (I = 0; I ≤ n - 1; I++) faça
5:   imprima MULHER[I]+1
6:   PERDAHOM ← PERDAHOM + CLASHOM [I] [MULHER[I]] + 1
7:   PERDAMUL ← PERDAMUL + CLASMUL [MULHER[I]] [I] + 1
8: fim para
9: imprima PERDAHOM, PERDAMUL
10: fim função

1: função TENTATIVA (HOM)
2: inteiro HOM
3: inteiro K, MUL
4: K ← 0
5: enquanto K < n faça
6:   MUL ← PREFHOM [HOM] [K]
7:   se SOLTEIRO [MUL] ∧ ESTAVEL (HOM, MUL, K) então

```

```

8:   MULHER [HOM] ← MUL
9:   HOMEM [MUL] ← HOM
10:  SOLTEIRO [MUL] ← .FALSO.
11:  se HOM < n-1 então
12:    TENTATIVA (HOM+1)
13:  senão
14:    IMPRIME()
15:  fim se
16:  SOLTEIRO[MUL] ← .V.
17: fim se
18: K++
19: fim enquanto

1: lógico função ESTAVEL (HOM, MUL, LIMITE)
2: inteiro HOM, MUL, LIMITE
3: inteiro CANDHOM, CANDMUL, K, ATEONDE
4: lógico RESP
5: RESP ← .V.
6: enquanto ((K < LIMITE) ∧ RESP) faça
7:   CANDMUL ← PREFHOM [HOM] [K]
8:   K++
9:   se ( SOLTEIRO[CANDMUL]) então
10:    RESP ← CLASMUL[CANDMUL][HOM] > CLAS-
        MUL[CANDMUL][HOMEM[CANDMUL]]
11:   fim se
12: fim enquanto
13: K ← 0
14: ATEONDE ← CLASMUL [MUL] [HOM]
15: enquanto ((K < ATEONDE) ∧ RESP) faça
16:   CANDHOM ← PREFMUL [MUL] [K]
17:   K++
18:   se (CANDHOM < HOM) então
19:    RESP ← CLASHOM[CANDHOM][MUL] >
        CLASHOM[CANDHOM][MULHER[CANDHOM]]
20:   fim se
21: fim enquanto
22: devolva RESP

1: Algoritmo CASAMENTO
2: inteiro PREFHOM [n] [n]
3: inteiro PREFMUL [n] [n]
4: inteiro CLASHOM [n] [n]
5: inteiro CLASMUL [n] [n]
6: inteiro HOMEM [n]
7: inteiro MULHER [n]
8: lógico SOLTEIRO [n]
9: inteiro I,J
10: SOLTEIRO ← .VERDADEIRO.
11: leia PREFHOM, PREFMUL
12: PREFHOM ← PREFHOM - 1
13: PREFMUL ← PREFMUL - 1
14: para i de 0 até n-1 faça
15:   para j de 0 até n-1 faça
16:     CLASHOM[I] [PREFHOM[I] [J]] ← J
17:     CLASMUL[I] [PREFMUL[I] [J]] ← J
18:   fim para
19: fim para
20: TENTATIVA (0)

```

## Para você fazer

Seja a preferência dos homens

8	10	5	3	2	7	6	4	1	9
9	7	8	4	1	6	10	5	2	3
2	1	7	4	8	6	5	3	9	10
4	10	1	5	6	3	7	2	8	9
5	3	6	9	8	2	1	4	7	10
2	3	4	7	1	10	8	6	9	5
10	2	3	7	8	9	4	6	1	5
1	3	8	9	2	4	10	7	5	6
3	7	8	10	4	9	6	5	1	2
1	5	8	9	6	4	2	7	10	3

Seja a preferência das mulheres

4	3	5	7	1	9	10	6	8	2
1	10	3	2	5	8	4	9	7	6
5	10	1	4	8	3	2	9	7	6
9	6	3	2	7	5	1	4	10	8
3	6	10	1	5	4	8	7	2	9
8	6	9	10	2	1	4	5	7	3
1	8	3	2	10	4	9	6	7	5
6	9	7	8	10	1	5	4	3	2
1	10	8	6	5	7	4	2	3	9
5	1	4	10	6	3	9	8	2	7

Implemente os algoritmos acima (não esqueça de subtrair 1 de cada elemento das matrizes acima, por causa da origem dos índices = 0) e ache o menor custo para os homens e o menor custo para as mulheres.

menor custo ho- mens	menor custo mulheres
-------------------------	-------------------------