Redução no número de conectivos

A seguir algumas demonstrações de como se pode reduzir o número de conectivos nas proposições:

$\wedge$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e de $\vee$

$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$\sim (\sim p \vee \sim q)$
$p \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \vee q$
$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim (\sim (\sim p \vee q) \vee \sim (\sim q \vee p))$

$\vee$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e de $\wedge$

$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$\sim (\sim p \wedge \sim q)$
$p \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim (p \wedge \sim q)$
$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim (p \wedge \sim q) \wedge \sim (\sim p \wedge q)$

$\wedge$, $\vee$ e $\leftrightarrow$ exprimem-se em termos de $\sim$ e $\rightarrow$

$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$\sim (p \rightarrow \sim q)$
$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$\sim p \rightarrow q$
$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\sim ((p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim (q \rightarrow p))$

Forma normal das proposições

Uma proposição está na forma normal se contém apenas $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.

Para botar uma proposição na forma normal, substitui-se $a \rightarrow b$ por $\sim a \vee b$ e substitui-se $a \leftrightarrow b$ por $(\sim a \vee b) \wedge (a \vee \sim b)$.

Há duas formas normais, a conjuntiva (FNC) e a disjuntiva (FND). A FNC obedece às seguintes condições:

1. Contém apenas $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.
2. $\sim$ só atua em letras proposicionais (ou seja não existe $\sim\sim$ e nem $\sim (\ldots)$.
3. $\vee$ não atua sobre $\wedge$ (ou seja não há $a \vee (b \wedge \ldots)$.

A FND, obedece:

1. Contém apenas $\sim$, $\wedge$ e $\vee$.
2. $\sim$ só atua em letras proposicionais (ou seja não existe $\sim\sim$ e nem $\sim (\ldots)$.
3. $\wedge$ não atua sobre $\vee$ (ou seja não há $a \wedge (b \vee \ldots)$.

Princípio da dualidade

Se P só contém $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, e se trocarmos em P cada $\vee$ por $\wedge$ e cada $\wedge$ por $\vee$ (um pelo outro), obtem-se a proposição dual de P, chamada P_1. E daqui, surge o princípio da dualidade que diz: Se P e Q são equivalentes e se só contém $\sim$, $\wedge$ e $\vee$, então, suas duais P_1 e Q_1 são também equivalentes.

Proposições associadas a uma condicional

Dada uma condicional $p \rightarrow q$, definem-se 3 proposições associadas,

recíproca $q \rightarrow p$

contrária $\sim p \rightarrow \sim q$

contrapositiva $\sim q \rightarrow \sim p$

Suas tabelas verdade são:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

As colunas 3-6 mostram que $p \rightarrow q$ e sua contrapositiva $\sim q \rightarrow \sim p$ são equivalentes, isto é $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$.

As colunas 4-5 mostram que a recíproca $q \rightarrow p$ e a contrária $\sim p \rightarrow \sim q$ da condicional $p \rightarrow q$ são equivalentes, ou seja, $q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$.

As mesmas tabelas verdade também demonstram que as condicionais $p \rightarrow q$ e a sua recíproca $q \rightarrow p$ e a sua contrária $\sim p\ to\ \sim q$ não são equivalentes.

Veja-se um exemplo: Se p significa que o triângulo T é equilátero, e q significa que T é isósceles, tem-se $p \rightarrow q$: Se T é equilátero, então T é isósceles, o que é verdadeiro. Já a recíproca $q \rightarrow p$ é Se T é isósceles então T é equiláterio, o que é falso.

Exemplo Seja determinar: a) a contrapositiva da contrapositiva de $p \rightarrow q$; b) a contrapositiva da recíproca de $p \rightarrow q$; c) a contrapositiva da contrária de $p \rightarrow q$.

A contrapositiva de $p \rightarrow q$ é $\sim q \rightarrow \sim p$. E a contrapositiva de $\sim q \rightarrow \sim p$ é $\sim\sim p \rightarrow \sim\sim q$ que é equivalente a $p \rightarrow q$ $(\sim\sim p \rightarrow \sim\sim q \Leftrightarrow p \rightarrow q)$.
A recíproca de $p \rightarrow q$ é $q \rightarrow p$. E a contrapositiva de $q \rightarrow p$ é $\sim p \rightarrow \sim q$.
A contrária de $p \rightarrow q$ é $\sim p \rightarrow \sim q$. E a contrapositiva de $\sim p \rightarrow \sim q$ é $\sim\sim q \rightarrow \sim\sim p$ que é equivalente a $q \rightarrow p$. $(\sim\sim q \rightarrow \sim\sim p \Leftrightarrow q \rightarrow p)$.

Observe que a recíproca e a contrária são cada uma a contrapositiva da outra e que a condicional e a contrapositiva são cada uma a contrapositiva da outra.

Álgebra das proposições - 2.parte

Agora a disciplina de lógica começa a ficar mais emocionante e cheia de drama e paixão. Neste momento, começa-se a provar coisas, construindo o enorme edifício da lógica matemática.

Antes algumas propriedades

$p \wedge p \Leftrightarrow p$	idempotência da conjunção
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	comutativa da conjunção
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$	associativa da conjunção
$p \wedge t \Leftrightarrow p$	identidade da conjunção
$p \wedge c \Leftrightarrow c$	identidade da conjunção
$p \vee p \Leftrightarrow p$	idempotência da disjunção
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	comutativa da disjunção
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$	associativa da disjunção
$p \vee t \Leftrightarrow t$	identidade da disjunção
$p \vee c \Leftrightarrow p$	identidade da disjunção
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	distributiva
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	distributiva
$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$	absorção
$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$	absorção
$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$	De Morgan
$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$	De Morgan
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$	substituição fundamental

Estratégias de demonstração

Quando a frase a provar é uma implicação ($a \Rightarrow b$) a estratégia é provar que a proposição $a \rightarrow b$ é uma tautologia. Quando a frase é uma equivalência, deve-se sair de um lado e chegar no outro, tanto faz em que sentido. Note que todas as propriedades que são equivalências permitem essa leitura nos dois sentidos. De resto, o objetivo é aplicar todas as propriedades acima listadas e tudo o que já se conhece da lógica matemática para provar o que se pretende. Não esqueça que muitas vezes NÃO se consegue chegar a nenhum resultado. Isso necessariamente não é um erro. Pode ser que o que se quer provar não possa ser provado.

Eis alguns exemplos:

1. Demonstrar a implicação $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$, conhecida como modus tollens.

   (a) ______ :– ______
   (b) ______ :– ______
   (c) ______ :– ______
   (d) ______ :– ______
   (e) ______ :– ______
   (f) ______ :– ______
   (g) ______ :– ______

2. Demonstrar a implicação $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$, conhecida como silogismo disjuntivo.

   (a) ______ :– ______
   (b) ______ :– ______
   (c) ______ :– ______
   (d) ______ :– ______
   (e) ______ :– ______

3. Demonstre a implicação $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$. Vai-se provar que a proposição $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é uma tautologia.

   (a) ______ :– ______
   (b) ______ :– ______
   (c) ______ :– ______
   (d) ______ :– ______
   (e) ______ :– ______

4. Demonstrar a equivalência $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow c$, também conhecida como redução ao absurdo. Neste caso, a estratégia de demonstração implica em sair do segundo membro e mediante operações lógicas válidas, chegar no primeiro.

   (a) ______ :– ______
   (b) ______ :– ______
   (c) ______ :– ______
   (d) ______ :– ______
   (e) ______ :– ______
   (f) ______ :– ______
   (g) ______ :– ______

☞ Para você fazer

Demonstre as seguintes frases lógicas, indicando passo a passo qual foi a regra, propriedade ou equivalência utilizada:

1. $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \Leftrightarrow p \rightarrow q \vee r$. (33)

   (a) ______ :– ______
   (b) ______ :– ______
   (c) ______ :– ______
   (d) ______ :– ______
   (e) ______ :– ______
   (f) ______ :– ______
   (g) ______ :– ______
   (h) ______ :– ______

2. $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow s) \Leftrightarrow p \wedge q \rightarrow r \vee s$.(7)

   (a) ______ :– ______
   (b) ______ :– ______
   (c) ______ :– ______
   (d) ______ :– ______
   (e) ______ :– ______
   (f) ______ :– ______
   (g) ______ :– ______
   (h) ______ :– ______