Prof Dr P Kantek (pkantek@gmail.com)

Interpolação - Método de Lagrange

Lembrando, a interpolação deve ocorrer quando se precisa prever o comportamento de um fenômeno, que tem uma das características

- Expressão analítica complexa, com descontinuidades (sem derivadas ou integrais) de muito difícil manuseio OU
- Expressão analítica desconhecida: nestes casos o que se tem é um conjunto de pontos (x e $f(x)$) descrevendo o fenômeno.

Em ambos os casos, deve-se buscar um polinômio que possa fazer o papel de expressão analítica do fenômeno. Neste exercício vai-se ver e exercitar o método de Lagrange.

Começa-se definindo um polinômio a ser usado nos pontos $x_0, x_1, ...x_n$ ($n+1$ pontos):

$$\begin{array}{ll} P_0(x) = & (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \\ P_1(x) = & (x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n) \\ ... & \\ P_n(x) = & (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1}) \end{array}$$

Note que no $P_k(x)$ o termo $x - x_k$ é excluído do produto.

Vai-se definir agora uma família de polinômios (conhecidos como de Lagrange)

$$\ell_k(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

Note que esta expressão apresenta o seguinte comportamento

$$\ell_k(x_j) = \begin{cases} 0 \ se \ k \neq j \\ 1 \ se \ k = j \end{cases}$$

Um parênteses, para entender o resultado acima: seja

$$\ell_k(x_j) = \frac{(x_j-x_0)...(x_j-x_{k-1})(x_j-x_{k+1})}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$

o que acontece se $k = 2$ e $j = 3$?

$$\ell_2(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_3)}{(x_2-x_0)...(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

note que o $(x_3 - x_3)$ no denominador vale 0, logo a fração toda se anula.
O que acontece agora se $k = 3$ e $j = 3$?

$$\ell_3(x_3) = \frac{(x_3-x_0)...(x_3-x_2)(x_3-x_4)}{(x_3-x_0)...(x_3-x_1)(x_3-x_4)}$$

veja que agora o numerador e o denominador são absolutamente iguais, o que simplificando, dá 1. Fecha o parênteses.

Então, supondo um fenômeno do qual se conhecem pares de valores $x_0, f_0 = f(x_0)$, $x_1, f_1 = f(x_1)$, ... $x_n, f_n = f(x_n)$, de uma função genérica (possivelmente desconhecida) $y = f(x)$, o polinômio

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x)$$

é chamado de **Fórmula de Lagrange do polinômio de interpolação**. Note que ele é de grau no máximo n e satisfaz

$$P_n(x_k) = f(x_k) \ para \ k = 0, 1, 2, ...n$$

Exemplo

Sejam 3 pontos:

x	$f(x)$
-1	15
0	8
3	-1

E seja descobrir quanto a função vale no ponto $x = 1$. Para isso, deve-se achar o polinômio de interpolação de Lagrange. Tem-se
$x_0 = -1, \ f(x_0) = 15$
$x_1 = 0, \ f(x_1) = 8$
$x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$
$n = 2$ e daqui $P_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k \ell_k(x)$.

Determinando os $\ell_k(x), \ k = 0, 1, 2$:
$\ell_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x^2-3x}{4}$
$\ell_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{x^2-2x-3}{-3}$
$\ell_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x^2+x}{12}$
e

$$P_2(x) = f_0\ell_0(x) + f_1\ell_1(x) + f_2\ell_2(x) =$$

$$15\left[\frac{x^2-3x}{4}\right] + 8\left[\frac{x^2-2x-3}{-3}\right] + (-1)\left[\frac{x^2+x}{12}\right]$$

cozinhando os dados e agrupando fica:

$$P_2(x) = x^2 - 6x + 8$$

e daqui $f(1) \cong P_2(1) = 3$

Esquema prático

Se for escrever um programa de computador para obter o valor da função em um ponto através do polinômio de interpolação pode-se usar um esquema prático o qual acha este ponto sem determinar a expressão do polinômio:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i . \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Escrevendo esta fórmula em termos mais amigáveis:

$$P(x) = y_0 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_o}}{Prod_0} + y_1 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_1}}{Prod_1} +$$

$$y_2 . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_2}}{Prod_2} + ... + y_n . \frac{\frac{Prod_x}{Dif_n}}{Prod_n}$$

Uma ótima atividade aqui é refazer o exemplo acima $\{x_0 = -1, \ f(x_0) = 15; \ x_1 = 0, \ f(x_1) = 8; \ x_2 = 3, \ f(x_2) = -1$ e $n = 2\}$ usando o esquema prático. O resultado tem que ser o mesmo, e ficará evidente que agora há muito menos trabalho.

A seguir, mais um exemplo, seja a função $f(x)$ conhecida nos pontos:

i	x_i	$f(x_i) = y_i$
0	0.00	1.000
1	0.10	2.001
2	0.30	4.081
3	0.60	8.296

Determinar o valor para $f(0.20)$ aplicando o esquema prático de Lagrange

	$x_0 =$	$x_1 =$	$x_2 =$	$x_3 =$	$\prod$
-	0.00	0.10	0.30	0.60	
	$D_0 =$	$D_1 =$	$D_2 =$	$D_3 =$	$P_x =$
$x = 0.20$	0.20	0.10	-0.10	-0.40	$P_x = 0.0008$
$x_0 = 0.00$	-	-0.10	-0.30	-0.60	$P_0 = -0.018$
$x_1 = 0.10$	0.10	-	-0.20	-0.50	$P_1 = 0.01$
$x_2 = 0.30$	0.30	0.20	-	-0.30	$P_2 = -0.018$
$x_3 = 0.60$	0.60	0.50	0.30	-	$P_3 = 0.09$

e agora

$$P_x(0.2) = (1.000 \times \frac{\frac{0.0008}{0.20}}{-0.018}) + (2.001 \times \frac{\frac{0.0008}{0.10}}{0.01}) +$$

$$(4.081 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.10}}{-0.018}) + (8.296 \times \frac{\frac{0.0008}{-0.40}}{0.09}) = 3.008$$

Freemat

```
function lagra(x,y)
   xitp=input('entre o x a interpolar ');
   n=size(x,2);
   for j=1:n
      dif(j)=xitp-x(j);
   end
   prodx=1;
   for j=1:n
      prodx=prodx*dif(j);
   end
   for i=1:n
      prod(i)=1
      for j=1:n
         if i~=j
            prod(i)=prod(i)*(x(i)-x(j));
         end
      end
   end
   yitp=0;
   for i=1:n
      yitp=yitp+y(i)*(prodx/dif(i))/prod(i);
   end
   disp('vetor dif');
   disp(dif);
   disp('prodx');
   disp(prodx);
   disp('prod');
   disp(prod);
   disp('yitp');
   disp(yitp);
%a=[2 2.5 3]; b=[16.5 24.4 33.6]; depois 2.7...
%deve dar como resposta: 27.924
```

☞ Para você fazer

1. Faça a interpolação de Lagrange **à mão** devolvendo os cálculos para a função cujos x_i são

   `2.64 3.58 4.57`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `6.6 45.8 439.2`

   E o valor a interpolar é 4.207

2. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   `2.44 3.47 4.47 5.4`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `7.2 50.3 484.7 5974.8`

   E o valor a interpolar é 4.308

3. Faça a interpolação de Lagrange para a função cujos x_i são

   `2.34 3.4 4.32 5.36`

   E os $f(x_i) = y_i$ são

   `8.4 59.2 575.1 7131.1`

   E o valor a interpolar é 4.82

Responda aqui o valor de y_{interp}

1	2	3