

Cálculo Numérico - solução de equações

Suponha que precisamos usar o computador para resolver equações. Já paramos para entender o que é resolver uma equação? Conhece-se a forma geral de uma equação $y = f(x)$. Resolver esta equação vem a ser descobrir quais os valores de x que fazer $f(x)$ ser igual a zero. Se olharmos para o gráfico, veremos que busca-se o valor da abscissa x que determina o cruzamento da curva de $f(x)$ no eixo dos x .

Por exemplo, suponha-se precisar descobrir a raiz 11 do número 1739? Ou seja, qual o número que multiplicado por ele mesmo 11 vezes dá como resultado 1739?

Dizendo isso na forma matemática, pode-se escrever $x^{11} = 1739$, ou melhor ainda $x^{11} - 1739 = 0$. Com isso, chegamos ao ponto.

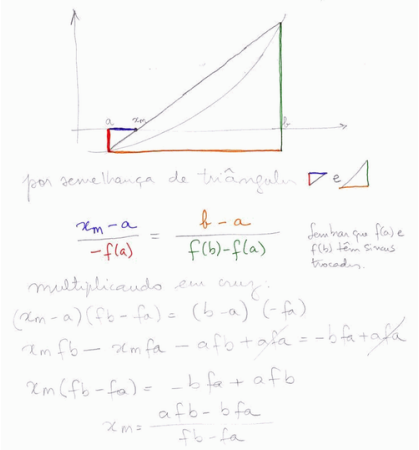
Método da Bissecção Se olharmos o gráfico de uma função, ver-se-á que no entorno da raiz, de um lado a função é positiva, e do outro lado é negativa ou vice versa. Este método começa pela seleção de 2 pontos x_a e x_b sendo que a função $y = f(x)$ têm sinais opostos nesses dois pontos. Graças a essa constatação, pode-se afirmar que a raiz procurada está entre x_a e x_b . Dizendo de outra maneira. O valor de x procurado, está entre a e b . O Método da bissecção vai dividindo o intervalo a, b pela metade, questionando a seguir em qual das metades o x está. Descoberto isso, despreza-se a metade que não contém x . Levando este processo ao limite, descobre-se qual o valor de x . Em resumo, eis as etapas do método:

1. Arbitrar intervalo em $[a, b]$ que compreenda a raiz.
2. Arbitrar um erro permitido ϵ
3. Calcular $x_m = (a + b)/2$
4. Se $f(a).f(x_m) < 0$ o novo intervalo será $[a, x_m]$
5. Se $f(a).f(x_m) > 0$ o novo intervalo será $[x_m, b]$
6. Enquanto o erro $b - a > \epsilon$ voltar ao passo 3.

Seja um exemplo, calcular $f = e^x - \sin(x) - 2 = 0$ nos limites $a = 1$ e $b = 1.25$ com $\epsilon = 0.01$. No primeira etapa tem-se

```
Limite Superior: 1.25
Limite Inferior: 1
Tolerancia: 0.01
-----a-----b-----xm-----fxm-----fa-----fb-----erro
1.1250 1.0000 1.1250 0.1779 0.5414 -0.1232 0.1250
1.0625 1.0000 1.0625 0.0200 0.1779 -0.1232 0.0625
1.0625 1.0312 1.0312 -0.0534 0.0200 -0.1232 0.0312
1.0625 1.0469 1.0469 -0.0171 0.0200 -0.0534 0.0156
1.0547 1.0469 1.0547 0.0013 0.0200 -0.0171 0.0078
Raiz: 1.05078125
Erro: -0.0078125
Eis o programa Python que resolve este caso
import numpy as np
def bissec():
    a=float(input("Limite Superior: "))
    b=float(input("Limite Inferior: "))
    tol=float(input("Tolerancia: "))
    print("-----a-----b-----xm-----fxm-----fa-----fb-----erro")
    while np.abs(b-a)>tol:
        xm=(a+b)/2
        fxm=np.exp(xm)-np.sin(xm)-2
        fa=np.exp(a)-np.sin(a)-2
        fb=np.exp(b)-np.sin(b)-2
        if fa*fxm>0:
            a=xm
        else:
            b=xm
        print('{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}'.format(a,b,xm,fxm,fa,fb,np.abs(b-a)))
    xm=(a+b)/2
    print("Raiz: ",xm)
    print("Erro: ",b-a)
bissec()
```

Cordas ou Falsa Posição



O método começa com uma análise do gráfico da função nas proximidades da raiz. Por semelhança de triângulos, pode-se obter a formulação proposta. Eis os passos do algoritmo:

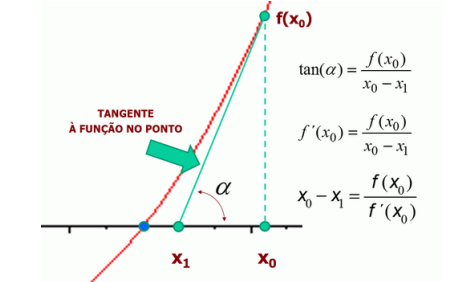
1. Arbitrar um intervalo $[a, b]$ que compreende a raiz
2. Arbitrar ϵ
3. Calcular $x_m = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$
4. Se $f(a).f(x_m) < 0$ o novo intervalo será $[a, x_m]$
5. Se $f(a).f(x_m) > 0$ o novo intervalo será $[x_m, b]$
6. Enquanto o erro $f(x_m) > \epsilon$ voltar ao passo 3

Veja a seguir a solução da mesma equação, ($e^x - \sin(x) - 2 = 0$) com os mesmos intervalos do método anterior.

```
Limite inferior: 1
Limite superior: 1.25
Tolerancia: 0.001
-----a-----b-----xm-----fxm-----fa-----fb-----erro
1.0463 1.2500 1.0463 -0.0184 -0.1232 0.5414
1.0530 1.2500 1.0530 -0.0026 -0.0184 0.5414
1.0540 1.2500 1.0540 -0.0004 -0.0026 0.5414
Raiz: 1.053972856764054
Erro: -0.0003663936835978099
```

```
Eis o programa Python que resolve este caso
from numpy import *
def cordas():
    a=float(input("Limite inferior: "))
    b=float(input("Limite superior: "))
    tol=float(input("Tolerancia: "))
    fxm=1
    print("-----a-----b-----xm-----fxm-----fa-----fb-----erro")
    while abs(fxm)>tol:
        fa=exp(a)-sin(a)-2
        fb=exp(b)-sin(b)-2
        fxm=((a*fb)-(b*fa))/(fb-fa)
        fxm=exp(xm)-sin(xm)-2
        if fa*fxm>0:
            a=fxm
        else:
            b=fxm
        print('{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}{:8.4f}'.format(a,b,xm,fxm,fa,fb))
    print("Raiz: ",xm)
    print("Erro: ",fxm)
cordas()
```

Método de Newton Este método começa com a interpretação geométrica da derivada. Lembrando, Newton é um monstro da ciência. Entre outras coisas, ele criou o cálculo diferencial e integral, a teoria da luz, a gravitação, as leis do movimento, além de, no fim da vida ter – como funcionário público – dirigido a casa da moeda inglesa, pendurando na força alguns falsários delinquentes. Voltando ao cálculo diferencial, uma das interpretações da derivada de uma função em um ponto é a tangente da curva da função naquele ponto. Veja-se o que se disse neste desenho



- Eis as etapas do método:
1. Obter a derivada da função a resolver

2. Arbitrar um ponto inicial x_0 para a função
3. Arbitrar o erro ϵ
4. Calcular $f(x_0)$ e $df(x_0)$
5. Calcular o “novo” x , $x = x_0 - f(x)/df(x)$
6. Se $|f(x)| > \epsilon$ retornar ao passo 4

Por exemplo, seja calcular as raízes da mesma equação acima que é $e^x - \sin(x) - 2 = 0$. A derivada é $\frac{d}{dx} = e^x - \cos(x)$. Obteve-se a seguinte tabela

```
-----x-----fx-----dfx
1.0000000 -0.12318915634885141 2.1779795
1.0565612 0.00579321190120519 2.3845934
1.0541318 0.00001105001756940 2.3754999
1.0541271 0.00000000004045120 2.3754825
Raiz: 1.0541271241082415
Erro: 4.0451197946822504e-11
Eis o programa Python que resolve este caso
from numpy import *
def newton():
    x=1
    tol=0.00001
    fx=exp(x)-sin(x)-2
    dfx=exp(x)-cos(x)
    print("-----x-----fx-----dfx")
    print("{:12.7f}{:20.17f}{:12.7f}".format(x,fx,dfx))
    while abs(fx)>tol:
        x=x-fx/dfx
        fx=exp(x)-sin(x)-2
        dfx=exp(x)-cos(x)
        print("{:12.7f}{:20.17f}{:12.7f}".format(x,fx,dfx))
    print("Raiz: ",x)
    print("Erro: ",fx)
newton()
```

Para você fazer

1. Resolva pelos 3 métodos, para poder comparar, a seguinte equação $x = \sqrt[11]{6433}$ no intervalo entre 1 e 2 e responda a seguir os 3 valores encontrados

bissecção	
cordas	
Newton	

2. Idem $y = 5 \sin(x) + 6 \cos(x) + 6.602008 = 0$ no intervalo entre 4 e 5 e responda a seguir os 3 valores encontrados

bissecção	
cordas	
Newton	

3. Idem $y = ((7 * x)/10) * e^{((4 * x)/10)} - 144.776202 = 0$ no intervalo entre 8 e 9 e responda a seguir os 3 valores encontrados

bissecção	
cordas	
Newton	

4. Idem $y = 7 * x^5 + 4 * x^3 - 902.000320 = 0$ no intervalo entre 2 e 3 e responda a seguir os 3 valores encontrados

bissecção	
cordas	
Newton	